Scuola di speleologia di Cagliari
della
CNSS-SSI

Speleo Club di Cagliari

Matematica curiosa e dilettevole . . . forse

Paolo Salimbeni

SOCIETA' SPELEOLOGICA ITALIANA

Comitato **E**secutivo **R**egionale **Sardegna**

Commissione **N**azionale **S**cuole di **S**peleologia

Edizione 7E705

Testi divulgativi

Prima edizione: 06 / 2011
Ultima edizione: 05 / 2023

Prefazione

Ho preferito separare in due la Dispensa «*Antiche*» *metodiche matematiche* perché e gli argomenti e le informazioni, che via via ho aggiunto, poco o nulla hanno a che spartire con la *matematica antica*.

Il titolo originale resta alla prima parte mentre il resto è diventata questa Dispensa in cui sono presenti ed alcune curiosità ed alcuni aspetti strani ed alcune nozioni originali.

Le appendici riportano, come di consueto, o rarità o stranezze o bizzarrie che per i matematici sono cose serie, ma che per i non *addetti ai lavori* possono sembrare stravaganti realizzazioni (*performance*, per chi preferisce i termini inglesi).

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare all'amico **Giuseppe Frau** che, lette le bozze, quasi definitive, del lavoro, lo ha *benevolmente criticato* sia indicandomi e sviste e lacune sia fornendomi ed osservazioni e consigli.

L'Autore

L'Autore sarà grato a tutti coloro che gli segnaleranno eventuali od *errori* od *imprecisioni* (sono graditi anche e *consigli* ed *opinioni*).

Paololuigi Salimbeni via P. Cavaro, 73 09131 Cagliari
cellulare: +39 3493897629
e-mail: p.salimba@gmail.com

Questa ed altre dispense, sempre dello stesso Autore, nel sito di **Paolo Salimbeni** «http://www.paolosalimbeni.it»; vedi in: **Dispense**.

Dello stesso Autore, e nel medesimo sito, alcune presentazioni in ***PowerPoint***; vedi in: **Presentazioni**.

Paolo Salimbeni

Matematica curiosa e Dilettevole . . . forse

Curiosità prese a caso

Somma dei primi «n» numeri dispari

La somma dei primi «n» numeri dispari è uguale a: n^2

1 + 3 = **4** = 2^2
1 + 3 + 5 = **9** = 3^2
1 + 3 + 5 + 7 = **16** = 4^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = **25** = 5^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = **36** = 6^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = **49** = 7^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = **64** = 8^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = **81** = 9^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = **100** = 10^2

Prodotti di numeri poli-unitari:

I numeri firmati da sole cifre «1» elevati al quadrato, generano numeri palindromi.

1^2 = 1
11^2 = 1 2 1
111^2 = 1 2 3 2 1
$1\,111^2$ = 1 2 3 4 3 2 1
$11\,111^2$ = 1 2 3 4 5 4 3 2 1
$111\,111^2$ = 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1
$1\,111\,111^2$ = 1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1
$11\,111\,111^2$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1
$111\,111\,111^2$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Somma di «n» termini di una progressione aritmetica

In matematica una **progressione aritmetica** è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun *termine* (o *elemento*) della successione e il suo precedente «$a_n - a_{n-1}$» sia una costante; tale costante «d» viene detta *ragione* della progressione.

Se il primo termine di una progressione aritmetica è «a_1» e la ragione è «d», allora il valore dell'ennesimo termine della successione «a_n» è dato dalla formula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \bullet d$$

In cui: a_n = valore dell'ennesimo termine – a_1 = valore del primo termine – n = numero dei termini – d = ragione della progressione.

Dalla quale deriva che se si conosce il valore del termine «a_m» di posto «m» e ragione «d», si può conoscere il valore del termine di posto «n» con la formula:

$$a_n = a_m + (n-m) \bullet d$$

In cui: a_n = valore dell'ennesimo termine – a_m = valore del termine di posto «m» - m = posto del termine «a_m» – n = numero dei termini – d = ragione della progressione.

La somma «S_n» dei primi «n» termini di una progressione aritmetica finita, si chiama ***serie aritmetica***, ed è data dalla formula:

$$S_n = \frac{n \bullet (a_1 + a_n)}{2}$$

In cui: S_n = somma di «n» termini della progressione – n = numero dei termini - a_1 = valore del primo termine – a_n = valore dell'ennesimo termine.

Prendiamo, per esempio, la progressione aritmetica di primo termine «a_1 = 2» e di ragione «d = 3» (5 - 2 = 3, 8 - 5 = 3, . . . 23 - 20 = 3): 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...

Calcoliamo il valore del termine «a_5» di posto «5», conoscendo e il valore del primo termine «a_1 = 2» e la ragione «d = 3»:

$$a_5 = 2 + (5-1) \bullet 3 = 14$$

Calcoliamo il valore del termine «a_7» di posto «7» conoscendo e il valore del termine «a_m = 8» di posto «m» e la ragione «d = 3»:

$$a_7 = 8 + (7-3) \bullet 3 = 20$$

Calcoliamo la somma «S_5» dei primi «5» termini della progressione:

$$S_5 = \frac{5 \bullet (2 + 14)}{2} = 40$$

Somma dei primi «n» numeri interi positivi

La somma dei primi «n» numeri interi positivi consecutivi è data dalla formula:

$$T_n = \frac{n \bullet (n + 1)}{2}$$

Calcoliamo la somma dei primi «80» numeri interi positivi consecutivi:

$$T_{80} = \frac{80 \bullet (80 + 1)}{2} = 3\ 240$$

Un aneddoto

Uno dei tanti aneddoti, che illustrano la e procacità e la predisposizione del il futuro e matematico ed astronomo e fisico tedesco **Johann Friedrich Carl Gauss** (1777 – 1855) per il calcolo, narra che quando questi aveva nove anni, il suo professore, il matematico tedesco **J. G. Büttner**, assegnò alla classe il compito di sommare tutti i primi numeri interi positivi dall'«1» al «100».

Nell'arco di pochi secondi, il giovanissimo Carl presentò la soluzione esatta «5 050», scritta sulla sua lavagnetta, esclamando in dialetto «*Ligget se*!» (Ecco qui!).

Si era, infatti, reso conto che sommando la prima cifra «uno» e l'ultima «cento» otteneva come risultato «101»; parimenti davano la stessa quantità la somma della seconda «due» con la penultima «novantanove».

Il ragionamento poteva proseguire, ottenendo sempre lo stesso valore: «1 + 100 = 101», «2 + 99 = 101», . . . «49 + 52 = 101», «50 + 51 = 101\»; aveva, pertanto, cinquanta (50) coppie di numeri la cui somma da «101»; il prodotto di «50» per «101» è, infine, il risultato cercato.

Somma di «n» termini di una progressione geometrica

In matematica, una ***progressione geometrica***, o ***successione geometrica*** (detta talvolta, impropriamente, anche *serie geometrica*), è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento ed il suo precedente «a_n/a_{n-1}» sia sempre costante; tale costante «q» è detta *ragione* della successione.

Se il primo termine di una progressione geometrica è «a_1» e la ragione è «q», all'ora il valore dell'ennesimo termine della successione «a_n» è dato dalla formula:

$$a_n = a_1 \bullet q^{n-1}$$

In cui: a_n = valore del l'ennesimo termine – a1 = valore del primo termine – n = numero dei termini – q = ragione della progressione.

Dalla quale deriva che se si conosce il valore del termine «a_m» di posto «m» e ragione «q», si può conoscere il valore del termine di posto «n» con la formula:

$$a_n = a_m \bullet q^{n-m}$$

In cui: a_n = valore dell'ennesimo termine – a_m = valore del termine di posto «m» - m = posto del termine «a_m» – n = numero dei termini – q = ragione della progressione.

La somma «S_n» dei primi «n» termini di una progressione geometrica finita, si chiama ***serie geometrica***, ed è data dalla formula:

$$S_n = a_1 \bullet \frac{q^n - 1}{q-1}$$

In cui: S_n = somma di «n» termini della progressione – a_1 = valore del primo termine – n = numero dei termini – q = ragione della progressione.

Il prodotto «P_n» dei primi «n» termini di una progressione geometrica finita è data dalla formula:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \bullet a_n)^n}$$

In cui: P_n = prodotto di «n» termini della progressione – a_1 = valore del primo termine – an = valore dell'ennesimo termine - n = numero dei termini – q = ragione della progressione.

Prendiamo, per esempio, la progressione geometrica di primo termine «a_1 = 2» e di ragione «q = 3» ($^6/_2$ = 3, $^{18}/_6$ = 3, . . . $^{4\,374}/_{1\,458}$ = 3): 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1 458, 4 374 . . ..

Calcoliamo il valore del termine «a_5» di posto «5», conoscendo e il valore del primo termine «a_1 = 2» e la ragione «q = 3»:

$$a_n = 2 \bullet 3^{5-1} = 162$$

Calcoliamo il valore del termine «a_7» di posto «7» conoscendo e il valore del termine «a_3 = 18» di posto «3» e la ragione «q = 3»:

$$a_n = 18 \bullet 3^{7-3} = 1\,458$$

Calcoliamo la somma «S_5» dei primi «5» termini della progressione:

$$S_5 = 2 \bullet \frac{3^5 - 1}{3-1} = 242$$

Calcoliamo Il prodotto «P_5» dei primi «5» termini della progressione:

$$P_5 = \sqrt{(2 \bullet 162)^5} = 1\,889\,568$$

La somma dei primi «n» numeri esatti, al cubo

La somma dei primi «n» numeri esatti consecutivi, elevati al cubo, è un quadrato esatto ed è la somma dei primi «n» numeri naturali al quadrato:

$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1+2+3+4+5+6)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots\ldots N^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots N)^2$

La serie di Mengoli

La ***serie di Mengoli***, chiamata così in onore del matematico italiano **Pietro Mengoli** (1626 – 1686), è la serie definita come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \bullet (n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \ldots$$

Questa serie risulta convergente ad «1».

Moltiplicazioni strane

12345679 • (9 • 1) = 111 111 111 [9 • 1 = 9]
12345679 • (9 • 2) = 222 222 222 [9 • 2 = 18]
12345679 • (9 • 3) = 333 333 333 [9 • 3 = 27]
12345679 • (9 • 4) = 444 444 444 [9 • 4 = 32]
12345679 • (9 • 5) = 555 555 555 [9 • 5 = 45]
12345679 • (9 • 6) = 666 666 666 [9 • 6 = 54]
12345679 • (9 • 7) = 777 777 777 [9 • 7 = 63]
12345679 • (9 • 8) = 888 888 888 [9 • 8 = 72]
12345679 • (9 • 9) = 999 999 999 [9 • 9 = 81]

12345679 • 999 999 999 = 12345678987654321

Magiche Eguaglianze

$1+25+31+84+87+134+158+182+198 = 2+18+42+66+113+116+169+175+199$
$1^2+25^2+31^2+84^2+87^2+134^2+158^2+182^2+198^2 = 2^2+18^2+42^2+66^2+113^2+116^2+169^2+175^2+199^2$
$1^3+25^3+31^3+84^3+87^3+134^3+158^3+182^3+198^3 = 2^3+18^3+42^3+66^3+113^3+116^3+169^3+175^3+199^3$
$1^4+25^4+31^4+84^4+87^4+134^4+158^4+182^4+198^4 = 2^4+18^4+42^4+66^4+113^4+116^4+169^4+175^4+199^4$
$1^5+25^5+31^5+84^5+87^5+134^5+158^5+182^5+198^5 = 2^5+18^5+42^5+66^5+113^5+116^5+169^5+175^5+199^5$
$1^6+25^6+31^6+84^6+87^6+134^6+158^6+182^6+198^6 = 2^6+18^6+42^6+66^6+113^6+116^6+169^6+175^6+199^6$
$1^7+25^7+31^7+84^7+87^7+134^7+158^7+182^7+198^7 = 2^7+18^7+42^7+66^7+113^7+116^7+169^7+175^7+199^7$
$1^8+25^8+31^8+84^8+87^8+134^8+158^8+182^8+198^8 = 2^8+18^8+42^8+66^8+113^8+116^8+169^8+175^8+199^8$

14 + 50 + 54 = 15 + 40 + 63 = 18 + 30 + 70 = 21 + 25 + 72
14 × 50 × 54 = 15 × 40 × 63 = 18 × 30 × 70 = 21 × 25 × 72

6 + 56 + 75 = 7 + 40 + 90 = 9 + 28 + 100 = 12 + 20 + 105
6 × 56 × 75 = 7 × 40 × 90 = 9 × 28 × 100 = 12 × 20 × 105

Un curioso insieme

I numeri interi: 1, 3, 8, 120 formano un insieme in cui il prodotto di due di essi da un numero che è uguale ad un quadrato perfetto meno uno.

Eguaglianze notevoli tra potenze consecutive:

$3^2 + 4^2 = 5^2$
$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Esempi di rigenerazione

45^2 = 2 025	20 + 25 = 45
45^3 = 91 125	9 + 11 + 25 = 45
45^4 = 4 100 625	4 + 10 + 06 + 25 = 45
45^5 = 184 528 125	18 + 4 + 5 + 2 + 8 + 1 + 2 + 5 = 45
45^6 = 8 303 765 625	8 + 3 + 0 + 3 + 7 + 6 + 5 + 6 + 2 + 5 = 45

Operazioni strane

1 • 8 + 1 = 9
12 • 8 + 2 = 98
123 • 8 + 3 = 987
1 234 • 8 + 4 = 9 876
12 345 • 8 + 5 = 98 765
123 456 • 8 + 6 = 987 654
1 234 567 • 8 + 7 = 9 876 543
12 345 678 • 8 + 8 = 98 765 432
123 456 789 • 8 + 9 = 987 654 321

1 • 9 + 2 = 11
12 • 9 + 3 = 111
123 • 9 + 4 = 1 111
1 234 • 9 + 5 = 11 111
12 345 • 9 + 6 = 111 111
123 456 • 9 + 7 = 1 111 111
1 234 567 • 9 + 8 = 11 111 111
12 345 678 • 9 + 9 = 111 111 111
123 456 789 • 9 + 10 = 1 111 111 111

9 • 9 + 7 = 88
98 • 9 + 6 = 888
987 • 9 + 5 = 8 888
9 876 • 9 + 4 = 88 888
98 765 • 9 + 3 = 888 888
987 654 • 9 + 2 = 8 888 888
9 876 543 • 9 + 1 = 88 888 888
98 765 432 • 9 + 0 = 888 888 888

123 • 8 + 3 = 987
1234 • 8 + 4 = 9 876
12345 • 8 = 5 = 98 765
123456 • 8 + 6 = 987 654

Curiosità sul numero «1»

a) Il numero «1» si può ottenere usando tutti le dieci cifre, dallo zero (0) al nove (9), ciascuna utilizzata una volta sola:

$$1 = \frac{35}{70} + \frac{148}{296}$$

b) esistono delle procedure, costituite da semplici regole matematiche, che permettono, a partire da un qualsiasi valore di un numero, di giungere all'unità, l'uno.

1) se il numero è pari, lo si divide per due.(2).
2) se il numero è dispari, lo si moltiplica per tre (3) e gli si aggiunge uno (1).
3) si ripete in procedimento fino a giungere all'uno (1).

Esempio

Prendiamo il numero «19»

«19» è dispari, per cui: 19 • 3 + 1 = 58,	«58» è pari, per cui: $^{58}/_2$ = 29,
«29» è dispari, per cui: 29 • 3 + 1 = 88,	«88» è pari, per cui: $^{88}/_2$ = 44,
«44» è pari, per cui: $^{44}/_2$ = 11,	«11» è dispari, per cui: 11 • 3 + 1 = 34,
«34» è pari, per cui: $^{34}/_2$ = 17,	«17» è dispari, per cui: 17 •3 + 1 = 52,
«52» è pari, per cui: $^{52}/_2$ = 26,	«26» è pari, per cui $^{26}/_2$ = 13,
«13» è dispari, per cui: 13 • 3 + 1 = 40,	«40» è pari, per cui $^{40}/_2$ = 20,
«20» è pari, per cui: $^{20}/_2$ = 10,	«10» è pari, per cui: $^{10}/_2$ = 5,
«5» è dispari, per cui: 5 • 3 + 1 = 16,	«16» è pari, per cui: $^{16}/_2$ = 8,
«8» è pari, per cui: $^{8}/_2$ = 4,	«4» è pari, per cui: $^{4}/_2$ = 2,

«2» è pari, per cui: $^2/_2 = 1$.

Curiosità sul numero «100»

a) Il numero «100» si può ottenere, usando «5» volte la stessa cifra, nei seguenti modi:

$$1000 = 111 - 11 \qquad 1000 = 3 \bullet 33 + \frac{3}{3}$$
$$100 = 5 \bullet 5 \bullet 5 - 5 \bullet 5 \qquad 100 = (5 + 5 + 5 + 5) \bullet 5$$

Il numero «1» si può anche ottenere, usando tutte le «9» cifre significative senza ripetizioni, nei seguenti modi:

$$100 = 74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} \qquad 100 = 95 + 4 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2} \qquad 100 = 98 + 1 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54}$$
$$100 = 91 + \frac{7524}{836} \qquad 100 = 15 + 78 + \sqrt[2]{9} + \sqrt[3]{64}$$

Il numero «100» è il quarto *olopotenziale* del terzo grado, nel senso che assomma tutti i termini della serie delle terza potenze, nella fattispecie:

$$100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64$$

b) Il numero «100» si può ottenere inserendo i segni matematici, e «+» e «-» e «·» e «+», fra le cifre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, in modo da formare un'espressione che dia, come risultato, il valore di «100».

La soluzione, forse più semplice, è:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \cdot 9) = 100$$

La soluzione che utilizza meno segni è:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

Un numero curioso: il «1 001»

Oltre ad essere divisibile per: 7, 11, 13 (tre numeri primi consecutivi), moltiplicando un numero di tre cifre per 1 001, si ottiene un risultato che presenta il moltiplicando ripetuto due volte.

207 • 1 001 = 207 207
873 • 1 001 = 873 873

Il numero 3 608 528 850 368 400 786 036 725

Questo numero di 25 cifre è divisibile per 25 e questo non riscuote alcun interesse, ma il discorso cambia se consideriamo che prendendo le prime «n» cifre, a partire da sinistra, il numero risultante è divisibile per «n».

Esempio

Se si prendono le prime 6 cifre (360 852), questo numero è divisibile per 6.

$^{360\ 852}/_6 = 60\ 142$.

Se si prendono le prime «17» cifre (36 085 288 503 684 007), questo numero è divisibile per «17».

$^{36\ 085\ 288\ 503\ 684\ 007}/_{17} = 2\ 122\ 664\ 029\ 628\ 471$.

Una curiosità curiosa

Se su una normale calcolatrice scriviamo un numero descrivendo una «U» orientata in una qualsiasi direzione, quel numero è divisibile per undici «11».

Ad esempio: premo il «7» poi il «4» poi il «5» poi l'«8», ottenendo il numero «7 458» che è divisibile per 11, infatti «7 458 / 11 = 678», oppure premo il «5» poi il «6» poi il «9» poi l'«8», ottenendo il numero «5 698» che è divisibile per 11, infatti «5 698 / 11 = 518», oppure premo il «2» poi il «5» poi il «4» poi l'«1», ottenendo il numero «2 541» che è divisibile per 11, infatti «2 541 / 11 = 231».

Perché ti chiederai? Vai a pagina 27 in [**Criteri di divisibilità** per «**11**»]; tutti i numeri digitati in questo modo (eseguendo una «U»), come risultato della prova, danno lo zero «0».

Un'altra curiosità curiosa

Se su una normale calcolatrice scriviamo un numero descrivendo una «U» orientata in una qualsiasi direzione, ed interponiamo dei simboli matematici nella forma «a – b + c - d», il risultato è sempre *zero*.

Esempio: batto il «6» il «5» il «2» il «3», inserisco i segni matematici ed ottengo l'espressione «6 – 5 + 2 – 3 = 0».

Inutili conoscenze, o quasi

♦ La somma dei quadrati di tre numeri dispari consecutivi: x, y, z, è uguale al triplo del quadrato del numero medio «y» più otto (8) unità.

Esempio: $5^2 + 7^2 + 9^2 = 3 \cdot 7^2 + 8 = 155$

♦ Per dividere il numero: **8** 101 265 822 784 per «8» è sufficiente spostare l'«8» dall'inizio alla fine del numero.
8 101 265 822 784 / 8 = 1 012 658 227 84**8**

♦ Per moltiplicare il numero: 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793 per «3», è sufficiente spostare il «3» dalla fine all'inizio del numero.
1 034 482 758 620 689 655 172 413 79**3** • 3 = **3** 103 448 275 862 068 965 517 241 379

♦ Per moltiplicare il numero:
1 016 949 152 542 372 881 355 932 203 389 830 508 474 576 271 186 440 677 966 per «6», è sufficiente spostare il «6» dalla fine all'inizio del numero, ottenendo:
6 101 694 915 254 237 288 135 593 220 338 983 050 847 457 627 118 644 067 796

♦ Il prodotto di cinque numeri interi consecutivi: x, y, j, k, z, non può essere né il quadrato né il cubo di un numero intero.

♦ Aggiungendo un'unità «1» al prodotto di 4 numeri consecutivi si ottiene sempre un quadrato.

♦ Il numero di cifre che compongono la serie dei numeri da uno «1» a «N» incluso, è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{x = m \bullet (N + 1) - \frac{10^m - 1}{9}}$$

In cui: m = numero di cifre del numero N.

Esempio, N = 300:

$$\mathbf{x = 3 \bullet (300 + 1) - \frac{10^3 - 1}{9} = 3 \bullet 301 - \frac{999}{9} = 903 - 111 = 792}$$

La somma di tutte le cifre di tutti i numeri, dall'uno (1) al trecento (300) compreso, è, pertanto, uguale a: 792 cifre.

♦ Prendiamo un numero di due cifre minore di 50; alla sua destra scriviamo il suo doppio e poi dividiamo il numero per «2», poi per «3» ed infine per «17» ottenendo il numero pensato, perché?

Sia AB il numero pensato e CD = 2AB. CD ha due cifre, perché AB < 50. ABCD si può scrivere come 100AB + 2AB; ABCD = 102AB. 102 = 2 • 3 • 17.

♦ Le cinque cifre dispari che danno come somma 20, sono:

1 + 1 + 5 + 13 = 20

♦ Vediamo come si possono completare le seguenti undici operazioni:

0 0 0 = 6, 1 1 1 = 6, 2 2 2 = 6, 3 3 3 = 6, 4 4 4 = 6, 5 5 5 = 6,

6 6 6 = 6, 7 7 7 = 6, 8 8 8 = 6, 9 9 9 = 6, 10 10 10 = 6,

Usando le quattro operazioni, le parentesi e gli operatori matematici che non abbiano bisogno di essere completati da altri numeri (p. es il simbolo di radice quadrata va bene, quello di radice cubica no perché ha bisogno di un indice numerico in più); non sono ammesse le funzioni trigonometriche e non è ammessa nemmeno e la funzione int(x) che prende la parte intera e la funzione mod(x,y) che calcola il resto.

Sono abbastanza semplici le seguenti soluzioni:

$2+2+2=6 \qquad 3 \bullet 3-3=6 \qquad 4+4-\sqrt{4}=6 \qquad \frac{5}{5}+5=6 \qquad 6-6+6=6 \qquad 7-\frac{7}{7}=6$

Un po' più impegnative, per la presenza delle doppie radici:

$$8-\sqrt{\sqrt{8+8}}=6 \qquad 9-\sqrt{\sqrt{9 \bullet 9}}=6$$

Decisamente più impegnative, data la non frequente dimestichezza con i fattoriali:

$$(1+1+1)!=6 \qquad (0!+0!+0!)!=6$$

Ancora più complessa, per la asimmetria della soluzione:

$$\left(\sqrt{10-\frac{10}{10}}\right)!=6$$

♦ La differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi è fornita dalla somma degli stessi due numeri:

$31^2 - 30^2 = 30 + 31 = 61 \qquad 138^2 - 137^2 = 138 + 137 = 275$

♦ Il prodotto di cinque numeri interi consecutivi fornisce, come risultato, un numero che termina sempre con zero «0»:

$$63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 = 1\ 158\ 917\ 760$$

♦ Il numero 24 678 050 è uguale alla somma delle sue cifre elevate ognuna all'ottava potenza.

$$24\ 678\ 050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8$$

Curiosità sul numero «666»

Il 666 è considerato il più nefasto dei numeri infausti, persino apocalittico.

È la somma delle sue cifre più il cubo delle sue cifre:

$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$$

Se non vi sembra strano, sappiate che esistono solo sei numeri con questa proprietà.

Si può rappresentare come una somma palindroma di cubi:

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

In numeri romani il 666 si scrive: DCLXVI, che sono le prime sei cifre, in numeri romani, ordinate in senso decrescente; 500, 100, 50, 10, 5, 1.

È la somma dei quadrati dei primi sette *numeri primi*:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

È un ***numero di Smith***: $666 = 2 \bullet 3^2 \bullet 37$; da cui si ha $6 + 6 + 6 = 2 + 3 + 3 + 3 + 7 = 18$

Vedere **I numeri di Smith**, a pagina 49.

La tripletta «216, 630, 666» è una terna pitagorica:

$$216^2 + 630^2 = 666^2$$

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

Il 666 è la *costante magica* di un *quadrato magico* di *sesto ordine* (n = 6).

X 666

3	107	5	131	109	311	666
7	331	193	11	83	41	666
103	53	71	89	151	199	666
113	61	97	197	167	31	666
367	13	173	59	17	37	666
73	101	127	179	139	47	666
666	666	666	666	666	666	666

Alcune equazioni diofantee

In matematica, le ***equazioni diofantee***, chiamate anche ***equazioni dio fantine***, sono equazioni indeterminate, od in una o più incognite, con coefficienti interi di cui si ricercano le soluzioni intere; l'aggettivo *diofanteo* si riferisce al matematico greco del **III** secolo **Diofanto di Alessandria**, in greco: Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, noto come *il padre dell'algebra* che studiò equazioni di questo tipo.

L'equazione diofantea esponenziale del topo: $x^a - y^b = 1$, ha un'unica soluzione:

$$3^2 - 2^3 = 1\ (9 - 8 = 1)$$

Per le equazioni diofantee del tipo: $a^3 + b^3 + c^3 = x$, si conoscevano molte soluzioni per «x» compreso fra «1» e «100»; fino alla fine del 1918, mancavano, però, ancora le soluzioni e per «x = 33» e per «x = 42».

La soluzione per il numero «33», fu trovata, all'inizio del 2019, dal matematico britannico **Andrew Richard Booker** (1976 - ?), dell'Università di Bristol nel Regno Unito, ed è:

$$8\ 866\ 128\ 975\ 287\ 528^3 + (-8\ 778\ 405\ 442\ 862\ 239)^3 + (-2\ 736\ 111\ 468\ 807\ 040)^3 = 33.$$

Restava, pertanto, soltanto la soluzione per x= 42 che si rivelò tanto complessa da consigliare a **Booker** di chiedere aiuto al matematico americano **Andrew Victor Sutherland** professore al **Massachusetts Institute of Technology** (MIT) ed esperto di calcoli massivi paralleli; i due hanno dovuto allargare ad altri il problema chiedendo l'aiuto del **Charity Engine**, un'iniziativa internazionale che permette di sfruttare la potenza di calcolo inutilizzata di oltre 500.000 calcolatori domestici per agire come una sorta di *supercomputer planetario*.

L'equazione diofantea, per il numero «42» è:

$$80\,435\,758\,145\,817\,515^3 + (-80\,538\,738\,812\,075\,974)^3 + 12\,602\,123\,297\,335\,631^3 = 42.$$

Una serie particolarmente complessa

Con quale *numero* prosegue la successione:

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112 221, , . . .?

***Provate a scoprirlo prima di leggere oltre*!**

Per trovarlo, cerchiamo di capire la *linea guida*.

Dato un primo numero, in questo caso «1», ogni altro numero della successione è la *descrizione* del numero che lo precede.

Analizziamo la situazione; all'inizio abbiamo la cifra «1» che descriviamo dicendo semplicemente che è «un 1», cioè sinteticamente «11» e proseguiamo osservando che «11» sono «due 1», cioè «21».

A questo punto abbiamo «un 2 e un 1», cioè "1211", e segue «un 1, un 2 e due 1", cioè la stringa «111221»; e così via.

L'ottavo termine della successione è, pertanto, «1113213211» che prosegue con la stringa «31131211131221»; e così via.

Si potrebbe iniziare anche col numero «2», nel qual caso avremmo:

«2», «12», «1112», «3112», «132112», e così via.

Potremmo iniziare la successione, anche, o con una qualsiasi altra cifra o persino con qualsiasi altro numero.

Un'altra serie alquanto complessa

Come continua la successione: cinque, due, nove, otto, quattro, sei, sette, : . .?

***Provate a scoprirlo prima di leggere oltre*!**

La successione è composta dai numeri ad una sola cifra elencati in ordine alfabetico e, pertanto, il suo ottavo termine è il *tre*, prosegue poi con l'*uno* e termina con lo *zero*.

Questa è una delle poche successioni che hanno ed un inizio ed una fine.

Avvertenze

Chiarimenti

Per non creare inutili ripetizioni, i paragrafi:

Insiemi numerici

Numeri basici

Altri numeri

Sono stati eliminati ed il loro contenuto è stato inserito nella Dispensa dello stesso Autore: *I Numeri*, presente nel sito: www.paolosalimbeni.it – Dispense.

La mnemonica di alcuni numeri

Il «π»

Per ricordare le prime diciannove (19) cifre di «π» possiamo far ricorso alla frase mnemonica:

Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9
prodiga spargesti con la tua saggezza.
7 8 3 2 3 8

In cui: il numero delle lettere di ogni parola corrisponde alla cifra da ricordare

Per ricordare le prime trentadue (32) cifre di «π», possiamo far ricorso alla frase mnemonica, in inglese:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics. One is, yes, adequate even enough to induce some fun and pleasure for an instant, miserably brief.

In cui: il numero delle lettere di ogni parola corrisponde alla cifra da ricordare

La precedente frase, tradotta in italiano diviene:

Come vorrei un drink, ovviamente alcolico, dopo i capitoli pasanti che coinvolgono la meccanica quantistica. Uno è, si, abbastanza adeguato da indurre un po' di divertimento e piacere per un istante, miseramente breve.

La «*e*»

Per ricordare le prime tredici (13) cifre di «*e*», base dei logaritmi naturali, possiamo far ricorso alle strofe mnemoniche:

Ai modesti o vanitosi	2 7 1 8
ai violenti o timorosi	2 8 1 8
do, cantando gaio ritmo,	2 8 4 5
logaritmo . . .	9 . . .

(Giorgio Rabbeno)

Per ricordare le prime quaranta (40) cifre di «e», possiamo far ricorso alla frase mnemonica, in inglese:

We present a mnemonic to memorize a constant so exciting that Euler exclaimed: '!' when first it was found, yes, loudly '!'. My students perhaps will compute e, use power or Taylor series, an easy summation formula, obvious, clear, elegant!

In cui: il segno «!» rappresenta lo zero.

La precedente frase, tradotta in italiano diviene:

Presentiamo un metodo mnemonico per memorizzare una costante così eccitante che Eulero esclamò: "!" quando è stata trovata per la prima volta, si, ad alta voce "!". I miei studenti forse calcoleranno e, useranno o le potenze o la serie di Teylor, una formula di somma facile, ovvia, chiara, elegante.

Alfabeto mnemonico di Tito Aurelj

Prima di esporre il sistema, è necessario imparare l'utilizzo dell'***alfabeto mnemonico di consonanti*** dell'Avv. Prof. **Tito Aurelj**; si tratta di associare a dieci (10) consonanti dell'alfabeto le dieci (10) cifre allo scopo di poter tradurre qualsiasi numero in una o più parole che, di per sé, si possono ricordare molto più facilmente dei numeri.

L'associazione tra le consonanti e le cifre è stabilita da **Aurelj** in base ad una somiglianza di forma; ecco l'alfabeto da lui proposto:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	t	n	m	L	s	b	r	f	g

Vediamo le giustificazioni di queste associazioni:

0 = come forma richiama ovviamente la lettera "o" ma, visto che dobbiamo utilizzare solo consonanti, gli attribuiremo una "mezza o", cioè la lettera **c**.
1 = è associato alla lettera **t** a causa della simile asta verticale.
2 = è associato alla lettera **n**, perché composta da 2 gambe.
3 = è associato alla lettera **m**, perché composta da 3 gambe.
4 = corrisponde alla lettera **L** perché ricorda la forma del 4 quando è scritta in maiuscolo.
5 = ricorda immediatamente la lettera **s**.
6 = è molto simile alla lettera **b** minuscola.
7 = è associato alla lettera **r** perché ricorda un 7 quando è scritta in corsivo.
8 = è associato alla lettera **f** a causa dei due occhielli che compongono la lettera nella scrittura corsiva.
9 = ricorda immediatamente la lettera **g**.

Tutte le altre consonanti rimanenti e le vocali non hanno valore numerico e possono essere utilizzate a piacere per comporre una o più parole di senso compiuto in cui siano presenti le consonanti numeriche.

Con questo sistema diventa molto facile trasformare numeri in parole e quindi ricordare sequenze di cifre anche molto lunghe.

Per citare un esempio; volendo ricordare sette (7) delle cifre significative, dopo la virgola, che compongono «π», posso memorizzarmi la frase:

I dia**m**e**tL**i **t**u di**s**e**gn**i **b**e'

In cui: le consonanti che hanno valore numerico, sono sottolineate ed indicate in grassetto.

Si ottiene pertanto il numero: **3.141 592 6**

Le formule più belle

Identità di Eulero

Leonhard Euler, noto in Italia come **Eulero** (1707 – 1783), è matematico e fisico svizzero.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Questa equazione è considerata, da molti matematici, la più bella di tutta la disciplina.

Formula di Eulero dei numeri complessi

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

Contende la palma di formula più bella della disciplina all'***Identità di Eulero***.

Logaritmo naturale di «-1»

$$\ln(-1) = \ln\left(e^{\pi i}\right) = \pi \bullet i$$

Formula di Stirling

Robert Stirling (1790 – 1878), pastore protestante scozzese e inventore del **motore Stirling**.

$$n! = \sqrt{2 \bullet \pi \bullet n} \bullet \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Formula di Binet:

Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matematico e astronomo francese.

$$Fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \bullet \left[\left\langle\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle^n - \left\langle\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle^n\right]$$

E' sorprendente constatare che una formula di questo genere, contenente addirittura termini irrazionali, possa fornire, al variare di «*n*», solo numeri naturali.
Il valore [1+√(5)]/2, che compare nella formula, corrisponde, guarda caso, alla famosa ***sezione aurea***, numero a cui tende il rapporto fra due ***numeri di*** **Fibonacci** consecutivi: 1.6180339...

Formula di Eulero-Cartesio (o formula dei poliedri convessi)

René Descartes [ʀə'ne de'kaʀt], latinizzato in **Renatus Cartesius** e italianizzato in **Renato Cartesio** (1596 –1650), filosofo e matematico francese.

$$F + V - S = 2$$

In cui: F = facce - V = vertici - S = spigoli

Una frase mnemonica, potrebbe essere: **F**atti **V**edere **S**tasera, più o meno (+ o -) alle due (2).

Forse il lettore sarà rimasto stupito nel non trovate, fra le formule più belle, la famosissima: **E = m • c**^{2}; formula conosciuta praticamente da tutti, pietra miliare nella fisica, ma in quanto a bellezza non la porrei proprio fra le prime.

Appendici

Appendice «0a»

I numeri più grandi

Il numero più grande che si può scrivere con tre cifre è: $9^{9^{9}}$.

Questo numero è composto da «369 693 100 cifre»; la prima cifra è un «4», mentre l'ultima è un «9», chiedo venia poiché taccio quelle intermedie.

Decilione: pari a 10^{60} (nella scala corta: 10^{30})

Googol: pari a 10^{100} (nella scala corta: 10^{50}), definito da **Edward Kasner** (1878 – 1955)

Centilione: pari a 10^{600} (nella scala corta: 10^{300})

Googolpex: pari a $10^{googol} = 10^{10^{100}}$

Il numero di **Skewes**, calcolato nel 1933, per molto tempo si è potuto fregiare del titolo di numero di valore più elevato compreso in una formula matematica; vale: $e^{e^{e^{79}}}$, essendo «e» base dei logaritmi naturali.

Megistone: il ***Megistone*** si rappresenta con questo simbolo: ⑩

Nella notazione *Steinhaus–Moser* si utilizza un numero inscritto in una forma geometrica per rappresentare n^n
con questo metodo si arriva al *Megistone* in questo modo: (con n = 10)

- $\triangle n = n^n$
- $\boxed{n} = \triangle n \, \triangle n \cdots \triangle n$ **(n triangoli elevati a n triangoli, n triangoli *volte*)**
- ⓝ $= \boxed{n}\,\boxed{n}\cdots\boxed{n}$ (n quadrati elevati a n quadrati, n quadrati *volte*)

Numero di Graham:

Il ***numero di*** **Graham**, così chiamato in onore di **Ronald Graham**, è considerato il primo numero di dimensioni inconcepibili ad essere usato in una seria dimostrazione matematica, il *Problema di Graham*, del quale rappresenta il limite superiore.

Il ***Numero di Graham*** può essere rappresentato e calcolato tramite la ***notazione a frecce di*** **Knuth**. In questa notazione, una singola freccia verso l'alto rappresenta un elevamento a potenza, la doppia freccia verso l'alto ($\uparrow\uparrow$) rappresenta una ***tetrazione***, ovvero una potenza ricorsiva, le tre frecce ($\uparrow\uparrow\uparrow$) rappresentano una ***tetrazione ricorsiva***, e ogni successiva freccia incrementa la profondità d'iterazione, con un aumento numerico estremamente elevato per ogni freccia aggiunta.

In termini numerici:

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^{3}} = 3^{27} = 7625597484987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow 3}_{3 \uparrow\uparrow 3 \text{ volte}} = 3 \uparrow\uparrow 3^{27} = \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\}$$

e via dicendo.

In questa notazione, il *numero di Graham* ha valore:

$$G = \left. \begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow \ldots \uparrow}3 \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad} \\ 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix} \right\} \text{64 piani}$$

Nell'***espressione*** riportata sopra, il numero di frecce di ogni livello successivo al primo è definito dal numero espresso nel livello inferiore. Arrivando al 64° livello e calcolandolo si sarà ottenuto il *numero di Graham*. In altre parole, se scriviamo $3 \uparrow^k 3$ per indicare un 3 seguito da *k* frecce (con il senso che si è visto sopra), allora il numero di Graham può essere definito come:

$$G = g_{64} \quad \text{con} \begin{cases} g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\ g_n = 3 \uparrow^{g_{n-1}} 3 \end{cases}$$

Da notare che anche il numero espresso dal primo livello g_1, nonostante sia di semplice comprensione in termini matematici, è un numero impossibile da rappresentare per intero in questo universo, e tuttavia rimangono altri 63 passi per arrivare al *Numero di Graham*.

Il numero di **Graham** è stato riportato nel ***Guinness dei primati*** nel 1980.

Conversioni un poco datate

Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 20 (numeri vigesimali$_{20}$)

La numerazione vigesimale, in base 20, pur non essendo una delle più diffuse, è stata utilizzata, nel passato, da varie civiltà.

Sulla base di alcune espressioni linguistiche moderne, sembra, infatti, che la «base 20» sia stata utilizzata diffusamente in epoche antiche.

Vestigia della *numerazione vigesimale* si possono individuare anche in alcuni vocaboli della lingua basca: ***hogei*** (20), ***berrogei*** (2 • 20), ***hirutogei*** (3 • 20), ***laurogei*** (4 • 20).

I francesi usano il ***quatre-vingt*** (quattro-venti) anziché di ***huitante***, per esprimere l'ottanta (80), e di ***quatre-vingt-dix*** (quattro-venti-dieci) anziché ***nonante***, per esprimere il novanta (90).

In forme linguistiche inglesi, cadute ormai in disuso sin dal **XIII** secolo, troviamo ***six-vingt*** (120), ***sept-vingt*** (140), ***huit-vingt*** (160), **quinze-vingt** (300).

Convertiamo il numero decimale «22 519» nel numero vigesimale «?$_{20}$».

Esempio:

```
22519 : 20   = 1125    con resto 19
 1125 : 20   =   56    con resto 5
   56 : 20   =    2    con resto 16
```

22 519 = 2G5L$_{20}$ (vedi oltre in: **Equivalenze [01] Equivalenze [02]**)

Osservazioni

Anche in questo caso, come nella numerazione esadecimale, si è utilizzato l'alfabeto per ottenere i segni necessari ad ottenere i venti simboli; anche in questo caso si deve procedere a scambiare ogni numero a due cifre con le equivalenti lettere dell'alfabeto.

Nella tabella **Equivalenze [02]** sono state semplicemente aggiunte le equivalenze non presenti nella precedente tabella **Equivalenze [01]**.

Equivalenze [02]				
16 = G	17 = H	18 = I	19 = L	20 = M

Conversione da base 20 (numeri vigesimali$_{20}$) a base 10 (numeri decimali)

Convertiamo il numero vigesimale «2G5L$_{20}$» nel numero decimale «?».

Ricordiamo qui solo ciò che ci interessa: G = 16, L = 19.

Esempio:

$$
\begin{array}{rcrl}
19 \bullet 20^0 & = & 19 & + \\
5 \bullet 20^1 & = & 100 & + \\
16 \bullet 20^2 & = & 6\,400 & + \\
2 \bullet 20^3 & = & \underline{16\,000} & \underline{+} \\
 & & 22\,519 &
\end{array}
$$

2G5L$_{20}$ = 22 519

La regola del Tre

Se sentite parlare della ***regola del tre***, non trasalite; si tratta semplicemente di normali proporzioni.

La ***regola del tre semplice*** enuncia: $a : b = c : d$ con $[b \neq 0, d \neq 0]$.

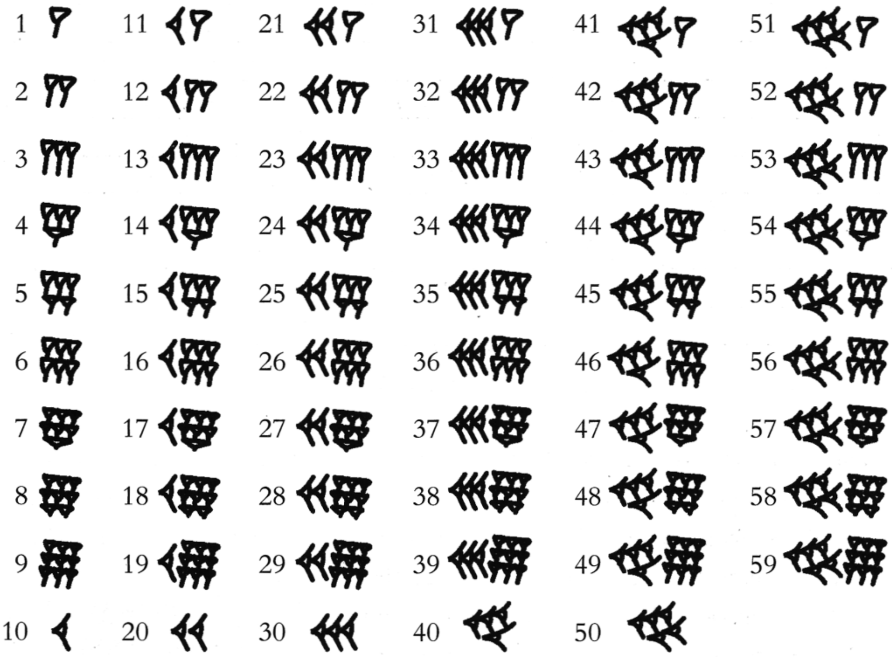
In cui: «a» e «c» sono gli ***antecedenti***
«b» e «d» sono gli ***conseguenti***
«a» e «d» sono gli ***estremi***
«b» e «c» sono i ***medi***

La ***regola del tre composto*** enuncia: $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$, $(a \pm b) : (c \pm d) = b : d$

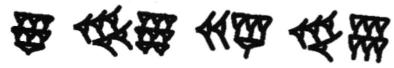
Dalle quali ne deriva immediatamente che, se sono valide queste proporzioni, sono valide anche le seguenti (in verità, basta sia valida la prima):

$a : c = b : d$, $b : a = d : c$, $a \bullet n : b = c \bullet n : d$, $({}^a/_n) : ({}^b/_n) = c : d$ con $[n \neq 0]$,
$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$,
$(m \bullet a + n \bullet b) : (m \bullet c + n \bullet d) = (m \bullet a - n \bullet b) : (m \bullet c - n \bullet d)$,
$(m \bullet a \pm n \bullet b) : (m \bullet c \pm n \bullet d) = (p \bullet a \pm q \bullet b) : (p \bullet c \pm q \bullet d)$,

La numerazione sessagesimale dei babilonesi



Convertiamo il numero decimale «1 722 286» nel numero sessagesimale «$?_{60}$».

1 722 286 = 

Omettiamo, per contro, di svolgere tutto il procedimento, trovatevelo!

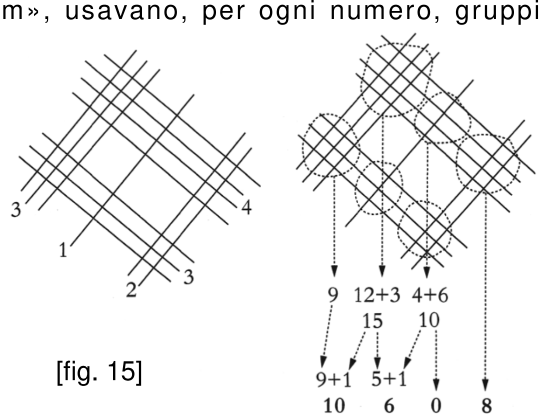
I Maya

I **maya** utilizzavano un ingegnoso, anche se poco pratico, sistema di moltiplicazione.

Per moltiplicare un numero «n» per un numero «m», usavano, per ogni numero, gruppi separati di righe parallele che rappresentavano l'ordine di grandezza; le due serie di gruppi erano fatte intersecare, fra loro, per poi contare le intersezioni corrispondenti.

Per eseguire la moltiplicazione: a = 312 • 34, si sarebbero dovuti usare gruppi di righe che rappresentassero e le centinaia e le decine e le unità, per il numero **312**, e gruppi di cifre che rappresentassero e le decine e le unità, per il numero **34**.

In [fig. 15] vi è la rappresentazione visiva del procedimento, con l'indicazione del numero delle intersezioni e la propagazione del riporto.



[fig. 15]

Questo procedimento diventa comunque quasi impraticabile sia con numeri a molte cifre sia con cifre grandi, poiché, in tal caso, le intersezioni diverrebbero troppo numerose.

Gli operatori aritmetici

Il ***segno dell'addizione*** «+», deriva molto probabilmente da una forma corsiva di ***et***, è appare, per la prima volta, in alcuni manoscritti tedeschi del **XIV** secolo dC.

Il ***segno della sottrazione*** «-», potrebbe semplicemente indicare una separazione.

Il ***segno di moltiplicazione*** «x», deriva probabilmente da un simbolo usato nel calcolo delle proporzioni, in cui si doveva ricorrere a moltiplicazioni incrociate del tipo: *numeratore per denominatore*; apparve, per la prima volta, nella ***Clavis mathematicae*** (La chiave della matematica), pubblicata, nel 1631, da **William Oughtred** (1574 – 1660).

Nel 1698, il filosofo e matematico tedesco **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646 – 1716), ritenendo che fosse possibile confondere il segno di moltiplicazione (X) con la lettera (χ), propose di sostituire il simbolo (X) con un semplice puntino (•).

Il ***segno di uguale*** «=», fu usato, per la prima volta, dal matematico inglese **Robert Recorde** (1512 – 1558) in ***The Whetstone of Witte*** (La cote dell'ingegno), pubblicato nel 1557; se v'interessa, ***Robert*** morì in prigione per debiti.

Il simbolo della radice quadrata «√»

Il simbolo della radice quadrata «√» fu ideato dal matematico tedesco **Cristofer Rudolf** (? - 1552); si ritiene che la forma del simbolo sia stata attinta dalla lettera «r», iniziale di *radicale*.

Il simbolo «π»

La denominazione del simbolo «π» si deve al matematico britannico **William Jones** (1675 - 1749) che lo chiamò così nel 1706, in una delle sue ***Synopsis Palmarionrum Matheseos***; il simbolo non è altro che l'iniziale, in greco, delle parole: περιφερεια (periferia), περιμετροζ (perimetro), ma alcuni, per contro, ritengono sia un omaggio allo scienziato e filosofo greco **Pitagora da Samo**.

Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) dimostrò 1882 che «π» è un numero trascendente.

La più antica approssimazione di «π» si trova nel papiro **Rhind** in cui lo si uguaglia all'espressione **256** / **81**, che equivale a: $\pi = (^{16}/_{9})^2 \approx 3.160493....$

Il grande matematico greco **Archimede di Siracusa** (287 a.C. – 212 a.C.), partendo dall'esagono regolare e raddoppiando ogni volta i lati, ottenne e le misure relative al poligono regolare di *novantasei* «96» lati ed un'eccellente approssimazione di «π» e, pertanto, il valore dell'area del cerchio: $A = 3.14185 \bullet r^2$.

I ***sicelioti***, Σικελιῶται in greco antico, erano gli abitanti delle poleis greche di Sicilia.

Attualmente il valore di «π» è conosciuto, grazie a **Fabrice Bellard** che lo calcolò nel 2010, con 2 699 999 989 951 cifre.

Il matematico giapponese **Yasumasa Kanada** [in giapponese 金田 康正] (1948 - !), con **Ushiro** e **Kuroda**, calcolò più di *mille miliardi* (1 241 100 000 000) di cifre di «π» e fece una statistica del numero di volte in cui appariva ogni cifra.

Cifra decimale	Numero di volte che appare ogni cifra
0	99 999 485 134
1	99 999 945 664
2	100 000 480 057
3	99 999 787 805
4	100 000 357 857
5	99 999 671 008
6	99 999 807 503
7	99 999 818 723
8	100 000 791 469
9	99 999 854 780
totale	1 000 000 000 000

Il simbolo dei logaritmi naturali (o neperiani) «*e*»

Il simbolo «*e*» è stato utilizzato per la prima volta dallo scienziato svizzero **Leonhard Euler** (1707 – 1785) nel 1727, ma compare, per la prima volta in una pubblicazione, nel 1736, nella ***Mechanica di Eulero***.

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ \ldots$$

Il simbolo «*i*»

Il simbolo «*i*» per rappresentare l'***unità immaginaria dei numeri complessi*** «*i* = √-1» compare in un articolo di **Leonhard Euler** del 1777, che però fu pubblicato solo nel 1794.

La lettera «*i*» fu scelta poiché l'iniziale della parola «*immaginario*».

Il simbolo «Σ»

Il simbolo operatorio di ***sommatoria*** «Σ», la sigma maiuscola, fu scelto da **Leonhard Euler** (Eolero) per indicare la somma di una successione di numeri sottoposta a determinate condizioni che sono indicate e sopra e sotto il simbolo.

$$\sum_{j=m}^{n} x_j = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

Il simbolo di percentuale «%»

Il simbolo di percentuale «%» è di origini italiane.

Giorgio Chiarino (1481) usa il simbolo «XX per c.» per indicare il 20 per cento; in una lettera commerciale sempre del **XV** secolo è usato un simbolo costituito da una p e uno 0 «p0» che, in seguito, si trasformerà in un simbolo del tipo «0/0»: in infine, nel 1650, compare il moderno %.

Il simbolo d'infinito «∞»

Il simbolo «∞», per indicare l'infinito, è stato ideato dallo scienziato inglese **John Wallis** (1616-1703) e compare, per la prima volta nel 1656, nell'opera ***Arithmetica Infinitorum***; è, forse, una modificazione del simbolo «(I)» che usavano i romani per indicare una miriade.

Il simbolo di fattoriale «!»

Il simbolo del fattoriale «!» fu introdotto nel 1808 in Germania da **Christian Kramp** (1760 – 1826); Il simbolo indica lo stupore per la rapidità con cui il risultato dell'operazione cresce, al crescere del numero di partenza.

Nel mondo anglosassone è anche detto ***n bang***.

Gli albori dei numeri

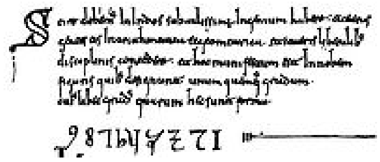
La più antica testimonianza, dell'impiego dei numeri, è un reperto in osso di ***papio*** (Babbuino) che risale a 35 000 anni fa; trovato nella catena montuosa di **Lebombo**, in **Swaziland** (Africa), durante uno scavo avvenuto nel 1973, possiede 29 incisioni e s'ipotizza potesse essere utilizzato come contatore delle fasi lunari.

L'***osso di Ishango*** è parimenti al precedente, un perone di babbuino; fu rinvenuto presso le fonti del **Nilo**, alla frontiera fra l'**Uganda** e la **Repubblica Democratica del Congo**.

Apparteneva ad una società tribale che fu tragicamente seppellita, circa 20 000 anni fa, da un'eruzione vulcanica.

Il Vigilanus Codex (Albendensis)

Il ***Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus***, risalente al 976 dC, contiene il più antico testo europeo in cui sono presenti le nostre cifre arabe.



La forma della maggior parte dei simboli (le cifre) è, direi ovviamente, diversa da quella attuale; perché prendano la forma che conosciamo, si dovrà aspettare fino al **XVI** secolo.

Nella figura al lato, estratta appunto dal ***Codex Vigilanus***, si può notare la mancanza, ancora, dello zero.

Sarà il matematico italiano **Leonardo da Pisa** (1175 - ?), detto **Fibonacci**, che, negli anni 1202 ÷ 1228, pubblicò la sua opera di quindici capitoli ***Liber Abaci***, tramite la quale introdusse, per la prima volta in Europa, le nove cifre (da lui chiamate *giustamente* indiane), assieme al segno zero «0», che in latino è chiamato *zephirus* «zefiro».

Il metodo delle differenze

Il ***metodo delle differenze***, oggi ormai caduto nell'oblio, è stato, in passato, uno dei principali strumenti a disposizione di chi doveva costruire tavole di funzioni polinomiali, evitando le complesse operazioni e di *moltiplicazione* e di *divisione*, utilizzando soltanto le molto più semplici *addizioni*.

Esprimendo una funzione $F(x) = 3x + 4$ con valori crescenti di ($x = 1, 2, 3, ...$), si ha:

x	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F(x)	=	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Differenze	=	3	3	3	3	3	3	3	3	

Se la funzione fosse leggermente più complessa, come $F(x) = x^2 + 3x + 4$, la determinazione di un valore costante richiederebbe il calcolo delle differenze delle differenze (o differenze seconde).

Esprimendo una funzione $F(x) = x^2 + 3x + 4$ con valori crescenti di ($x = 1, 2, 3, ...$):

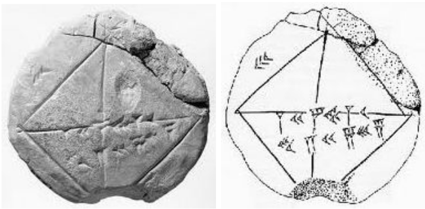
x	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F(x)	=	8	14	22	32	44	58	74	92	112
Diff. prime	=	6	8	10	12	14	16	18	20	
Diff. seconde	=	2	2	2	2	2	2	2		

Come regola generale, se il polinomio da esprimere contiene un termine in «x^n», per ottenere una differenza costante è necessario calcolare le differenze ennesime.

Per elaborare le tavole, bisogna esprimere il polinomio per molti valori di «x»; il procedimento consiste nel sommare la differenza costante alla differenza eventualmente immediatamente sovrastante, quindi sommare, tale differenza, a quella ad essa eventualmente immediatamente sovrastante, e così via fino ad ottenere il valore della funzione.

L'irrazionalità di «√2»

La prima dimostrazione, di cui si ha notizia, dell'irrazionalità della radice quadrata di due (√2) è quella del filosofo e matematico greco *presocratico* della scuola Pitagorica **Ippaso di Metaponto** (in greco Ἵππασος Μεταποντῖνος) vissuto nel 500 a.C..



La tavoletta mesopotamica, datata tra il 1800 a.C. ed il 1600 a.C. numerata YBC7289, è conservata nell'università di Yale; su di essa è disegnato un quadrato con le due diagonali, accompagnato da una serie di numeri in notazione sessagesimale (in base 60).

Si ritiene che questi dati numerici siano un'approssimazione di «√2» con i suoi «n» primi decimali; in notazione attuale:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \bullet 4} + \frac{1}{3 \bullet 4 \bullet 34} = \frac{577}{408} = \mathbf{1{,}414\,21}5\,686$$

Con i primi cinque decimali esatti.

Cateto e Ipotenusa

I termini derivano ambedue dal greco: ***cateto*** è originato dal termine *kathetos*, che deriva da *cotos* (retto o conforme) e significa *perpendicolare*, ***ipotenusa*** deriva da *upoteinousa* che significa la **linea che o sottende o sostiene** ossia la *linea che sottende l'angolo retto*.

La congettura di Eulero

La ***congettura di*** **Eulero** è una congettura collegata all'***ultimo teorema di*** **Fermat** che fu proposta da **Eulero** nel 1769; essa affermava che: ***per ogni intero*** **«n > 2»*, la somma di*** **«n – 1»** ***potenze n-esime di interi positivi non può uguagliare una potenza n-esima***.

Questa congettura fu confutata da **L. J. Lander** e **T. R. Parkin** nel 1966, che trovarono il seguente *contro esempio* per «n = 5»:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Nel 1988, **Noam Elkies** trovò un metodo per costruire dei *contro esempi* per il caso «*n* = 4»; il *contro esempio* più piccolo che fornì fu il seguente:

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$$

Fino ad ora, non sono noti *contro esempi* per «*n* > 5».

Il problema dei quattro colori

La soluzione venne presentata, per la prima volta come congettura, da **Francis Guthrie** (1831 – 1899) nel 1852, uno studente di **Augustus De Morgan** (1806 – 1871); la prima pubblicazione relativa all'argomento si deve ad **Arthur Cayley** (1821 – 1895).

La prima *dimostrazione*, a lungo riconosciuta come definitiva, fu formulata nel 1879 da **Alfred Kempe** (1849 – 1922); nel 1880 **Peter Guthrie Tait** (1831 – 1901) annunciò di avere trovato un'ulteriore dimostrazione del teorema.

Nel 1890 **Percy John Heawood** (1861 – 1955) scoprì l'errore che minava la dimostrazione di ***Kempe***; l'anno successivo, ad opera di **Julius Petersen** (1839 – 1910), anche la dimostrazione di ***Tait*** fu riconosciuta errata.

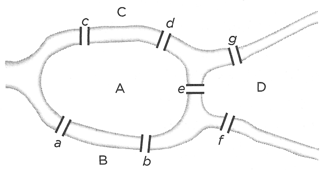
Confutando la dimostrazione di Kempe, Heawood dimostrò tuttavia che cinque colori erano sufficienti per qualsiasi mappa.

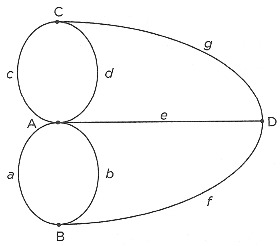
La definitiva dimostrazione del teorema per quattro soli colori è stata fornita nel 1977 da parte di **Kenneth Ira Appel** (1932 – 2013) e **Wolfgang Haken** (1928 -), due matematici dell'Università dell'***Illinois***, grazie a un complesso algoritmo informatico e all'uso intensivo del calcolatore (computer per chi preferisce i termini inglesi).

I Ponti di Königsberg

Il ***problema dei ponti di Königsberg*** è un problema geometrico che, per contro, non contiene né alcuna figura determinata né alcuna misura; si deve ragionare soltanto sulla posizione di e linee e punti definiti, e nel modo di andare dagli uni agli altri.

Il problema nacque, per l'appunto, a **Königsberg** (oggi **Kaliningrad**), città, dell'estrema *Prussia orientale*, bagnata, e lo era anche allora, dal fiume ***Pregel*** i cui rami, attraversandola, delimitano sia un'isola «A» sia tre estensioni di terra: «B», «C», «D».





Alcuni abitanti si posero in dilemma se era possibile trovare un percorso che, cominciando e terminando nello stesso punto, passasse un'unica volta su ciascun ponte.

Eulero ebbe l'idea di prescindere dalla forma di tutti i componenti e sostituirli con un grafo.

Osservazioni

Un grafo è una rappresentazione grafica, a forma di rete, costituita da due parti: i punti chiamati o *nodi* o *vertici*, i percorsi che li collegano, chiamati od *archi* o *spigoli* o *lati*; il *grado di un nodo* è il numero di *archi* incidenti in un *nodo*.

Il percorso si dirà ***cammino auleriano*** quando, il suddetto itinerario, passa una sola volta per ciascun arco, si dirà ***circuito euleriano*** quando il percorso, passando una sola volta per ogni arco, inizia e termina nello stesso *nodo*.

Il *circuito euleriano* è definito, da molti, il ***percorso perfetto***.

Chiamando «n» il numero di nodi di grado dispari, possiamo enunciare le seguenti deduzioni:

a) se «n = 0», il grafo contiene almeno un circuito euleriano
b) se «n = 2», il grafo contiene almeno un cammino euleriano, ma nessun circuito
c) se «n > 2», il grafo non contiene né alcun cammino né alcun circuito

Nel nostro caso «n = 4», non vi è alcun *percorso perfetto*; per rendere il problema risolvibile (ottenere un percorso perfetto) si dovrebbe o costruire un ponte in più, in un punto qualsiasi nel percorso del fiume, o demolire uno dei ponti attualmente presenti.

Se n = 2 il problema ha almeno una soluzione, ma si dovrà necessariamente iniziare da uno dei due nodi di grado dispari; se n = 0 si può iniziare da uno qualsiasi dei nodi pari.

Possiamo, comunque, procedere in un modo differente, predisponendo uno specchietto nel modo indicato in «S1».

Legenda

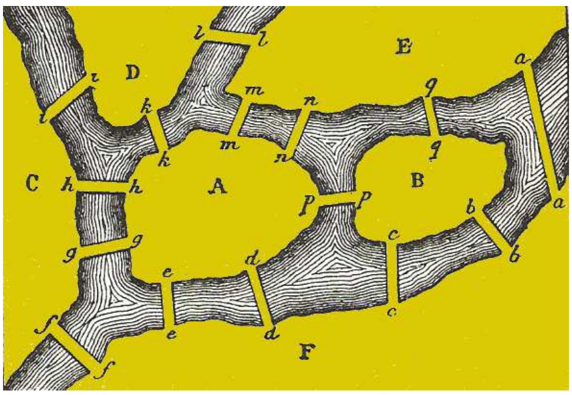
M = numero di ponti che fanno capo ad una medesima regione.
nP = numero totale dei ponti
x = nP + 1

S1		**«m» dispari** parte intera	**«m» pari**
Regioni	**Ponti «m»**	$^m/_2 + 1$	$^m/_2$
A	5	3	-
B	3	2	-
C	3	2	-
D	3	2	-
		$Y_1 = 9$	$Y_2 = 0$
		$Y = Y_1 + Y_2 = 9$	

nP = 7
x = 7 + 1 = 8
Y = 9

Il totale delle ultime due colonne «$Y = Y_1 + Y_2 = 9$» è superiore ad «x = 7 + 1 = 8» per cui il problema non ha soluzioni.

Vediamo un altro esempio



Predisponiamo uno specchietto come in «S2».

S2		**«m» dispari** parte intera	**«m» pari**
Regioni	**Ponti «m»**	$^{m}/_{2} + 1$	$^{m}/_{2}$
A	8	-	4
B	4	-	2
C	4	-	2
A	3	2	-
B	5	3	-
D	6	-	3
		$Y_1 = 5$	$Y_2 = 11$
		$Y = Y_1 + Y_2 = 16$	

nP = 15
x = 15 + 1 = 16
Y = 16

Essendo la somma delle ultime due colonne «Y = 16» uguale ad «x = 16», il problema ha almeno una soluzione.

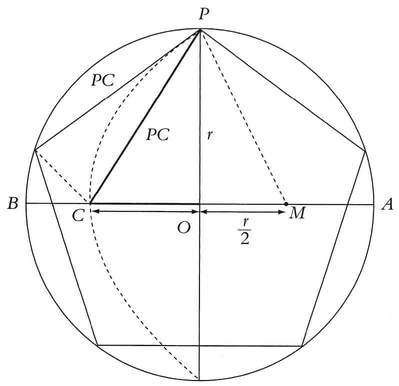
Una possibile soluzione è:
D i-i E q-q B p-p A n-n E m-m A k-k D i-i C h-h A g-g C f-f F e-e A d-d F c-c B b-b F a-a E

Osserviamo, per inciso, che vi sono due (2) regioni, e soltanto due, a cui fanno capo un numero dispari di ponti; numero di nodi «n = 2» di grado dispari.

Appendice «0b»

Costruzione del pentagono regolare

La costruzione con e riga e compasso sia del triangolo equilatero sia del *quadrato* dovrebbero essere conosciute da tutti; meno probabile è che qualcuno si ricordi la costruzione del *pentagono regolare*.



Osservazioni

Eseguire una costruzione con e *riga* e *compasso* significa tracciare e segmenti ed angoli servendosi esclusivamente e di una riga e di un compasso idealizzati.

La ***riga*** non è graduata, non vi è, pertanto, la possibilità di far riferimento a eventuali tacche per prendere misure; il ***compasso*** non ha memoria, non vi è, pertanto, la possibilità di ripetere una data apertura che il compasso aveva avuto in precedenza, esso, infatti, si richiude dopo ogni operazione.

Iniziamo col tracciare una circonferenza di centro «*O*» e raggio «r»; tracciamo inoltre il suo diametro «*B A*» e segniamo, sul raggio «*O A*», il punto medio «*M*» a $^{r}/_{2}$ dal centro «*O*».

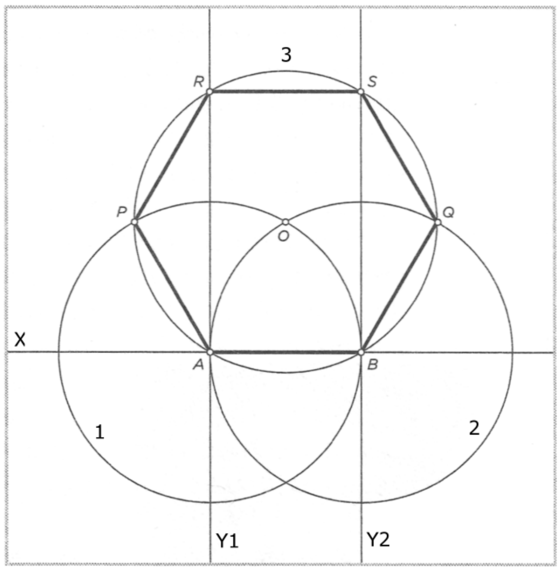
Facendo centro in «*M*», tracciamo un arco di circonferenza, di raggio «*M P*», fino a farlo intersecare col raggio «*O B*» in «*C*».

La lunghezza del segmento «*P C*» è uguale alla lunghezza del lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza utilizzata.

Facendo centro in «*P*», tracciamo un arco di circonferenza, di raggio «*P C*», fino ad incontrare la circonferenza e ricavare il primo lato del pentagono regolare; da qui, servendoci del compasso, si ricavano le successive corde di lunghezza «*P C*», che individuano i vertici e pertanto anche i lati del pentagono regolare.

Costruzione dell'esagono regolare

Contrariamente a quanto ritenevo, anche la costruzione dell'esagono, con e riga e compasso, sembra essere, con mia sorpresa, sconosciuta ai più.



Iniziamo col tracciare due rette parallele: la «X» e la «Y1» che s'incontrano in «*A*»; consideriamo conosciuta la costruzione di due rette perpendicolari con riga e compasso.

Stacchiamo sulla retta «X», a partire da «*A*», un segmento di lunghezza «*A B*» e tracciamo la perpendicolare «Y2» alla retta «X» in «*B*»; il segmento «*A B*» diverrà la lunghezza del lato dell'esagono.

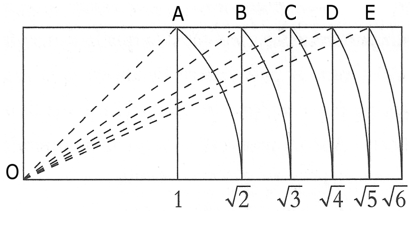
Facendo perno, col compasso, prima in «A» e poi in «B», con apertura «A B», tracciamo sia la circonferenza «1» sia la circonferenza «2», che si intersecheranno in due punti uno dei quali sarà il punto «*O*» che ci interessa.

Ora, facendo perno, col compasso, in «O», con apertura «O A», si traccia la circonferenza «3» che intersecherà la circonferenza «1» nel punto «*P*» e la «2» in «*Q*», la retta «Y1» in «*R*» e la «Y2» in «*S*»; i punti: «*P*», «**Q**», «*R*», «*S*» sono i vertici dei lati del poligono, basta unirli per ottenere l'esagono regolare.

Come si evince dalla figura: la lunghezza del lato di un *esagono regolare* è uguale alla lunghezza del raggio del cerchio circoscritto.

Rappresentazione geometrica di alcune radici quadrate

Partendo da un quadrato di «1 • 1», la rappresentazione geometrica di √2 è la diagonale del quadrato unitario.



Se riportiamo col compasso, facendo centro in «O», la diagonale del quadrato «O A» sul prolungamento del lato di base, otteniamo un rettangolo di lati «1 • √2» la cui diagonale «O B» misura √3.

A partire da qui si possono visualizzare geometricamente, seguendo lo stesso procedimento, tutti i segmenti √2, √3, √4, √5, √6, ...

La Sezione aurea

La ***Sezione aurea*** o il ***numero aureo*** o il ***numero d'oro*** è un numero irrazionale che si rappresenta con la lettera greca *phi* «Φ».

Fu scoperto dai greci dell'epoca classica ed è documentato, per la prima volta, in uno dei libri e più celebri e più ristampati di tutti i tempi: gli ***Elementi di geometria*** del matematico greco **Euclide di Alessandria** (330 a.C. – 275 a.C.), scritto intorno al 300 a.C..

Gli *Elementi di geometria* sono composti di ben tredici libri: i libri dal I al VI trattano la geometria elementare, dal **VII** al **X** le equazioni numeriche, dall'**XI** al **XIII** la geometria dei solidi; nel **VI**, alla ***terza*** definizione si legge:

> **Dize fe fer diuidida vna linea recta con razion extrema ymedia quando fuere queco mo fe ha coda a la mayor parte, affi la mayora la menor.**

Nella celebre versione del matematico italiano **Nicolò Tartaglia**, soprannome di **Nicolò Fontana** (1500 – 1557), si legge:

> **Una linea se dice esser diuisa seconda la proporzione hauente il mezzo & duoi estremi quando che egliè quella medesima proportionedi tutta la linea alla sua maggiore sectione che è della maggior sectione alla minore.**

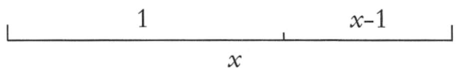
Lo stesso concetto può essere enunciato, in italiano moderno, come:

> **Si dice che un segmento è diviso in media ed estrema ragione quando la lunghezza della linea totale sta a quella della parte maggiore come quella della parte maggiore sta a quella della minore.**

Parimenti, usando una forma più concisa, si può dire:

> **Il tutto sta alla parte come la parte sta al rimanente.**

Dopo la, o meglio, le definizioni, andiamo a calcolare il valore di «Φ».



Consideriamo un segmento «*x*» e prendiamo due sue parti, la partizione che vogliamo prendere in esame si troverà in media ed estrema ragione, ovvero sarà una partizione aurea quando:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Quest'uguaglianza può essere espressa anche come:

$x \cdot (x - 1) = 1$ $\qquad$ $x^2 - x = 1$

equivalente all'equazione di secondo grado: $x^2 - x - 1 = 0$

Questa equazione ha due soluzioni di cui quella positiva, quella che ci interessa, è:

$$x = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204\ 586\ 834\ 365\ 638\ 117\ 720\ 309\ldots$$

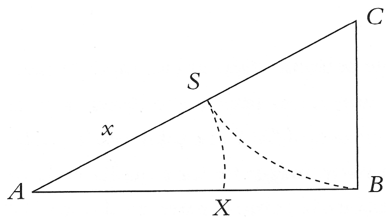
Il valore di «x» (sezione aurea) può essere altresì espresso come somma di una serie infinita, come ad esempio:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ \ 848\ 204\ 586\ 834\ 365\ 638\ 117\ 720\ 309\ \ldots$$

Rappresentazione geometrica della sezione aurea

Il triangolo aureo

Costruiamo un triangolo rettangolo con cateti «*A B*» e «*C B*», con $CB = \frac{AB}{2}$



Considerando il segmento «*A B*», si vuole individuare il punto «*X*» che lo divida in due parti la cui proporzione sia «Φ».

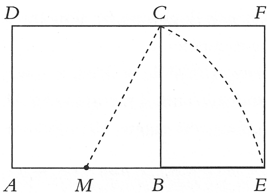
Facendo centro in «*C*», con raggio «*C B*», tracciamo un arco di circonferenza che interseca «*A C*» in «*S*».

Facendo centro in «*A*», con raggio «*A S*», tracciamo un arco di circonferenza che interseca «*A B*» in «*X*».

Questo procedimento è noto come ***metodo grafico per l'individuazione della sezione aurea***.

Il rettangolo aureo

Partiamo da un quadrato «*A B C D*» il cui lato è il lato minore del rettangolo aureo che ci apprestiamo a costruire.



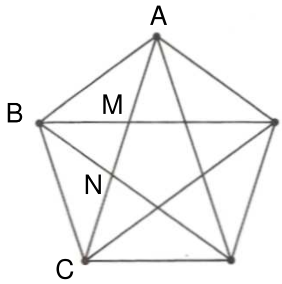
Individuiamo il punto medio «*M*» del suo lato «A B» e, facendo centro in esso con raggio «*M C*», tracciamo un arco che sechi il prolungamento di «*A B*» in «*E*».

La lunghezza «*A E*» è la lunghezza del lato maggiore del *rettangolo aureo* che stiamo cercando.

Infine, non ci resta che tracciarla perpendicolare al lato «*A E*», in «*E*», fino ad incontrare il prolungamento del lato «*D C*» in «*F*»; otteniamo così il rettangolo «*A E F D*» che è appunto il rettangolo aureo oggetto della nostra ricerca.

Le sezioni auree nascoste

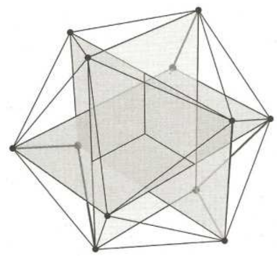
Nel pentagono regolare compare una grande quantità di proporzioni auree, vediamone alcune.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MN} = \frac{1 * \sqrt{5}}{2}$$

Anche nel dodecaedro, formato da dodici pentagoni, pertanto, sono molto frequenti le relazioni auree

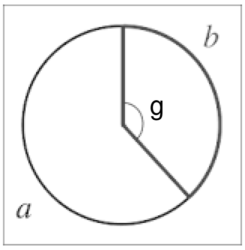
possiamo altresì trovare proporzioni aure nell'icosaedro; se uniamo due spigoli opposti in un icosaedro, otteniamo un rettangolo aureo.



Se raggruppiamo i dodici vertici prendendo spigoli opposti, a due a due, otterremo la figura rappresentata qui a destra, nella quale appaiono tre rettangoli situati in piani perpendicolari tra loro a due a due.

L'angolo aureo

In geometria l'***angolo aureo*** (in inglese *golden angle*) è l'angolo sotteso dall'arco di circonferenza più piccolo (l'arco «*b*» in neretto della figura accanto) che si ottiene dividendo la circonferenza stessa in due archi «*a*» e «*b*» che stanno tra loro nello stesso rapporto che si ha nella sezione aurea.



Dati una circonferenza «c» e due archi di circonferenza «*a*» e «*b*» in cui essa è divisa, l'angolo aureo è quindi definito come **l'angolo al centro sotteso dall'arco** «*b*» (quello minore) a condizione che:

$$a + b = c \qquad\qquad b < \alpha$$

e che valga la regola: $\frac{c}{a} = \frac{a}{b}$

Dalla cui equivalenza si ricava che il rapporto aureo è uguale a:

$$\varphi = \frac{a}{b} \qquad\qquad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ed ancora, anche se da noi non dimostrato:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 = 2{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638\,117\,720\,309\ \ldots$$

l'angolo aureo «g» risulta, pertanto, essere.

In gradi sessadecimali: $g = b = \left(3 - \sqrt{5}\right) \bullet 180° = \frac{360°}{\varphi^2} = \frac{360°}{2{,}618\,033\,988\ \ldots} \approx 137{,}507\,764°$

In radianti: $g = b = \left(3 - \sqrt{5}\right) \bullet 180° = \frac{2 \bullet \pi}{\varphi^2} = \frac{2 \bullet \pi}{2{,}618\,033\,988\ \ldots} \approx 2{,}399\,963^{\text{rad}}$

Sempre sull'angolo aureo

Possiamo altresì ragionare in altro modo e partendo dalla:

$$c : a = a : b$$

otteniamo:

$$360 : a = a : 360 - a \qquad\qquad \text{da cui: } a^2 = 360 \bullet (360 - a)$$

ed infine:

$$a^2 + 360\,a - 129\,600 = 0$$

Risolvendo:

$$a = \frac{-\,360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-129\,600)}}{2}$$

ed eliminando la soluzione senza senso, si ha:

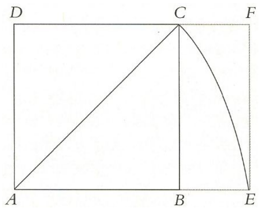
$$a = \frac{-360+360 \bullet \sqrt{5}}{2} \qquad \text{da cui: } a = -180 + 180 \bullet \sqrt{5} \approx 222,492\,236°$$

Da cui: g = b = 360° - 222,492 236° = 137,507 764°

222,492 236° = 222° 29’ 32,049 6”
137,507 764° = 137° 30’ 27,950 4”

Il rettangolo √2

Riconsideriamo il discorso fatto in **Rappresentazione geometrica di alcune radici quadrate**, a pagina 29.



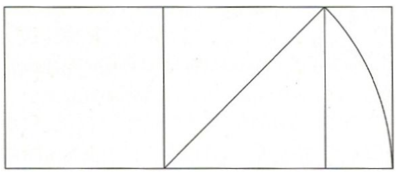
Ricordiamo che partendo da un quadrato «ABCD», di lato unitario «1» e prendendo il centro in uno dei suoi vertici (ad esepio il vertice «A») e, assumendo come raggio la distanza fra questo vertice e quello opposto (nel nostro caso «AC»), tracciamo un arco che intersechi il prolungamento del lato «AB» in un punto che chiameremo «E».

Il rettangolo «AEFD», pertanto,ha le dimensioni e di «1», in un lato, e di «√2», uguale alla diagonale di un quadrato di lato unitario, nell’altro lato.

Appresso chiameremo «RR» il rettangolo di questo tipo.

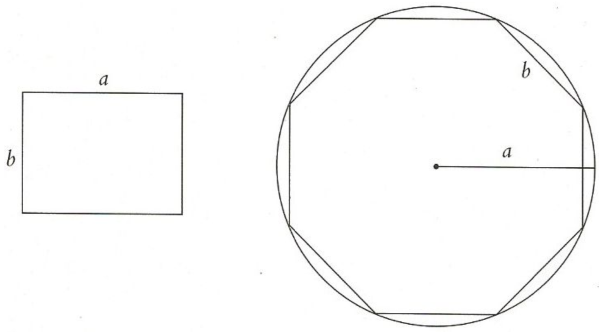
Il rettangolo d’argento

Il ***rettangolo d’argento*** si ottiene aggiungendo ad un quadrato di lato unitario un rettangolo «RR»; si tratta, pertanto, di un rettangolo di lati ed «1» ed «1 + √2», di modulo «1 + √2», che rappresenta la soluzione dell’equazione di secondo grado: «x^2 - 2x – 1 = 0».



Il rettangolo di Cordova

L’architetto spagnolo **Rafael De la Hoz** (1924 – 2000) *scoprì* il rettangolo chiamato ***rettangolo di Cordova***, studiando le proporzioni dei principali monumenti architettonici musulmani, fra cui la famosa ***Mezquita*** con il suo meraviglioso *mihrab*.



Egli rappresentò le proporzioni da lui trovate come un rettangolo uguale alla lunghezza del raggio «a» di una circonferenza e l’altro uguale alla lunghezza «b» del lato dell’ottagono inscritto in essa.

Conoscendo il lato «a» dell’ottagono ed il raggio «b» del cerchio si può ricavare quello che viene chiamato o *proporzione cordovana* o *numero cordovano*:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cong 1{,}306\,562\ldots$$

Ricordiamo che il valore della *sezione aurea*, è pari a: ≅1,618 033 . . .

Appendice «0c»

Curiosità sul teorema di Pitagora

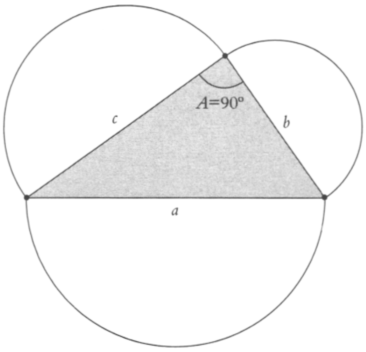
Forse non fu lo scienziato greco **Pitagora di Samo** (572 a.C.? – 500 a.C.?) ad escogitare per primo il teorema che porta il suo nome, ma sicuramente fu chi per primo ne diede una dimostrazione generale, valida per qualsiasi triangolo rettangolo; qui ricordiamo il ***Teorema di Pitagora*** com'era enunciato nella sua versione originale:

> Dato un triangolo con vertici ***ABC***, l'angolo ***A*** è retto (triangolo rettangolo), se e solamente se l'area del quadrato costruito sul lato ***a***, opposto ad ***A***, corrisponde alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri lati ***b*** e ***c*** ($a^2 = b^2 + c^2$).

Più spesso, attualmente, è enunciato nei seguenti termini:

> In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Ma cosa avverrebbe se al posto dei quadrati considerassimo dei semicerchi?



$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Dividendo per $\frac{1}{2}\pi$ si ha:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Moltiplicando per $2^2 = 4$, si ha:

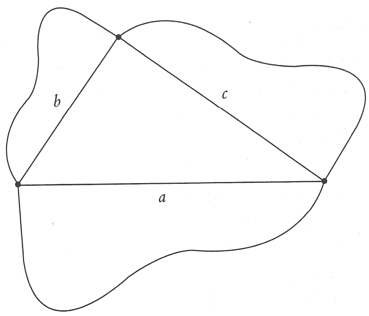
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Non è tutto, il teorema sarebbe dimostrato, infatti, anche nel caso si considerassero figure simili qualsiasi, complesse quanto si voglia.

Tutto discende dalla semplice dimostrazione classica del caso dei quadrati; **Pitagora**, col suo teorema, ha fornito la soluzione matematica a problemi che spaziano in ambiti molto più vasti di quanto fosse prevedibile.

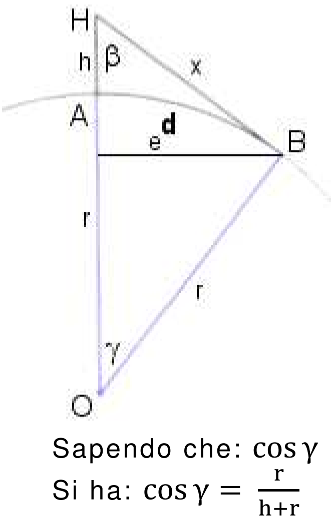
Come detto, anche considerando una figura qualsiasi con un tratto rettilineo da potersi sovraporre ai lati del triangolo rettangolo, il teorema di Pitagora resta valido.

Un esempio è riportato nel disegno qui a destra.



Un'applicaione interessante del «teorema di Pitagora»

Come è noto la forma della Terra è generalmente approssimabile ad un ellissoide oblato (schiacciato ai poli) la cui curvatura non garantisce una visibilità ottica fra due sue località poste a qualsiasi distanza.



Sapendo che la ***visibilità*** dipende dalla quota a cui si trova l'osservatore, potremmo porci una domanda: **a quanti chilometri si vedrà la linea dell'orizzonte se l'osservatore si dovesse trovare ad una quota «h»?**

Considerando la Terra sferica di raggio r = 6371 km e sapendo che l'angolo «HBO» è un angolo retto (90°), applicando il ***teorema di* Pitagora** si ha:

$$x = \sqrt{(h + r)^2 - r^2}$$

$$x = \sqrt{h^2 + 2 \bullet h \bullet r + r^2 - r^2}$$

da cui: $x = \sqrt{h^2 + 2 \bullet h \bullet r}$

Sapendo che: $\cos\gamma \bullet (h + r) = r$

Si ha: $\cos\gamma = \frac{r}{h+r}$ da cui: $\gamma = \arccos\frac{r}{h+r}$

$$d = \frac{2 \bullet \pi \bullet r}{360°} \bullet \gamma°$$

Questa è la formula esatta, da applicare sempre quando «h» è significativo rispetto ad «r» come nel caso di una visuale da satellite.

Dal punto «h» si vedrebbe la superficie terrestre come una calotta sferica di raggio:

$$e = r \bullet \sin\gamma$$

con una circonferenza «c» pari a: $c = 2 \bullet \pi \bullet e$

Comunemente, per contro, l'altezza «h» è assolutamente trascurabile, rispetto al raggio terrestre «r», e la distanza «d» è assimilabile alla lunghezza del segmento «x»; in questo caso si può utilizzare la formula approssimata.

Partendo da: $d = \sqrt{h^2 + 2 \bullet h \bullet r}$ si ottiene: $d = \sqrt{h \bullet (h + 2 \bullet r)}$

Eliminando, per semplificare, l'altezza «h» all'interno della perentesi, si ha:

$$d_a = \sqrt{2 \bullet r \bullet h} = \sqrt{2 \bullet r} \bullet \sqrt{h}$$

Ricordando che il raggio terrestre, nel caso di una Terra sferica, è r = 6.371 km, la distanza «d_a», alla quale si vedrebbe l'orizzonte dall'altezza «h», sarebbe:

$$d_a = \sqrt{2 \bullet 6{,}371} \bullet \sqrt{h} = \sqrt{12{,}742} \bullet \sqrt{h} = \mathbf{3{,}57} \bullet \sqrt{\mathbf{h}}$$

Ed infine considerando la rifrazione atmosferica uguale a f = 1.08 si ha.

$$d_a = 3{,}57 \bullet 1{,}08 \bullet \sqrt{h} = \mathbf{3{,}86} \bullet \sqrt{\mathbf{h}}$$

In cui: «d_a» è espressa in chilometri, mentre «h» è espressa in metri.

Nel caso da un punto «P», posto ad una certa quota «h_1», si osservi un oggetto «O», posto ad una quota «h_2», la formula approssimata, che formisce la distanza massima alla quale l'oggetto «O» e visibile da «P», diviene:

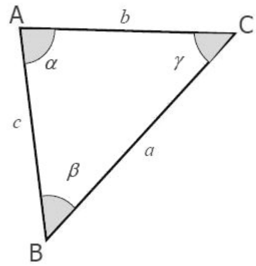
$$d_{OP} = 3{,}86 \bullet \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)$$

Appendice «0d»

Triangoli qualunque

Prendiamo ora in considerazione i ***triangoli qualunque*** e analizziamo quali strumenti matematici abbiamo a disposizione per la loro risoluzione.

Consideriamo il *triangolo qualunque* «ABC», gli *strumenti* a nostra disposizione sono:



Somma degli angoli interni: α + β + γ = 180° = 200^c

Si usa per trovare un ***angolo*** quando si conoscono gli altri due.

per cui: $\alpha = 180° - \beta - \gamma$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

Teorema dei seni (per i lati): $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\beta}{\sin\beta} = \dfrac{\gamma}{\sin\gamma}$

Si usa per trovare un ***lato*** quando si conoscono sia un lato e l'angolo opposto sia l'angolo opposto al lato da determinare.

per cui: $a = b\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

$b = a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = c\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

Teorema di Carnot (per i lati)

Si usa per trovare un ***lato*** quando si conoscono gli altri due e l'angolo fra loro compreso.

risolvendo: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \bullet b \bullet c \bullet \cos\alpha}$

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \bullet a \bullet c \bullet \cos\beta}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \bullet a \bullet b \bullet \cos\gamma}$

Teorema di Carnot (per gli angoli)

Si usa per trovare un ***angolo*** quando si conoscono tutti i lati.

risolvendo: $\alpha = arccos\ \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \bullet b \bullet c}$

$\beta = \arccos\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \bullet a \bullet c}$

$\gamma = \arccos\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \bullet a \bullet b}$

Teorema dei seni (per gli angoli)

Si usa per trovare un angolo (quando non abbiamo altre alternative).

Risolvendo: $\alpha = arcsin\dfrac{a \bullet \sin\beta}{b} = arcsin\dfrac{a \bullet \sin\gamma}{c}$

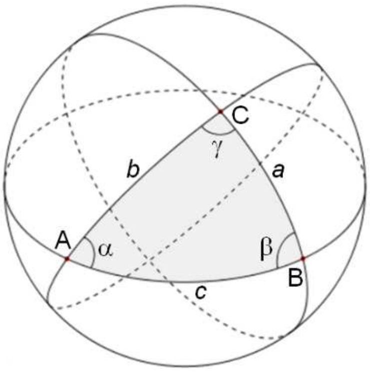
$\beta = arcosin\dfrac{b \bullet si\ \alpha}{a} = arcsin\dfrac{b \bullet \sin\gamma}{c}$

$\gamma = arcsin\dfrac{c \bullet \sin\alpha}{a} = arrcsin\dfrac{c \bullet \sin\beta}{b}$

Appendice «0e»

Curiosità sul triangolo sferico

La **trigonometria sferica** è un ramo della *geometria sferica* che si occupa delle relazioni fra lati ed angoli dei poligoni ed in particolare dei triangoli costruiti su una sfera.



Curiosità

Il primo trattato di *trigonometria sferica* è stato scritto dal matematico arabo **Al-Jayyni** nel 1060 dC.

I lati di questi poligoni, archi di cerchio massimo, non sono identificati per la loro lunghezza lineare, ma tramite l'angolo sotteso da essi rispetto al centro della sfera; la lunghezza dell'arco, pertanto, è dato dall'angolo al centro, misurato in radianti, moltiplicato per il raggio della sfera.

Curiosità

Un'area della sfera che sia delimitata da archi di cerchio massimo è detto **poligono sferico**; in questo modo sono possibili ***biangoli sferici*** (poligoni dotati di due soli lati), diversamente dal caso planare.

Se disegnamo, su una sfera di raggio «r», un triangolo sferico qualunque, la somma dei suoi angoli interni è sempre superiore a «π» (180 °C), di una quantità chiamata ***eccesso sferico*** e che si denota con «ε».

$$\alpha^{rad} + \beta^{rad} + \gamma^{rad} - \pi = \varepsilon^{rad}$$

Se due triangoli sferici, appartenenti rispettivamente a superfici sferiche di diverso raggio, sono simili, il triangolo giacente sulla superficie sferica di raggio maggiore ha eccesso sferico minore dell'altro triangolo; possiamo, pertanto, affermare che l'eccesso sferico di un determinato triangolo sferico diminuisce man mano che il raggio della superficie sferica, a cui appartiene, aumenta.

L'eccesso sferico è quindi nullo solo quando il raggio è infinito; in questa circostanza è più corretto parlare e di piano, al posto di superficie sferica, e di rette, al posto di circoli massimi.

Il ***Teorema di*** **Girard** nella geometria dello spazio, dal nome del matematico francese **Albert Girad** (1595 – 1632) stabilisce che l'area «S» di un triangolo sferico costruito su una sfera di raggio «r» è uguale a:

$$S = \varepsilon \bullet r^2$$

Formule di Eulero (Teorema del coseno)

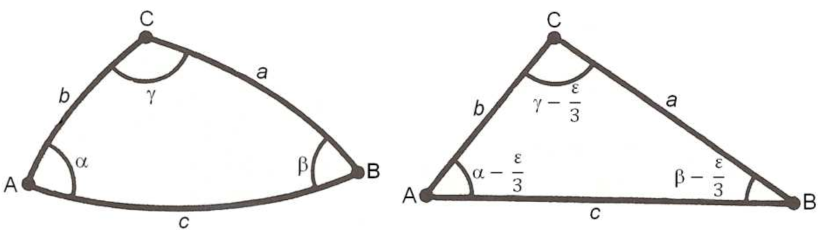
I triangoli sferici soddisfano la legge dei coseni sferici

$\text{Cos}\ a = \text{Cos}\ b \bullet \text{Cos}\ c + \text{Sin}\ b \bullet \text{Sin}\ c \bullet \text{Cos}\ \alpha$

$\text{Cos}\ b = \text{Cos}\ a \bullet \text{Cos}\ c + \text{Sin}\ a \bullet \text{Sin}\ c \bullet \text{Cos}\ \beta$

$\text{Cos}\ c = \text{Cos}\ a \bullet \text{Cos}\ b + \text{Sin}\ a \bullet \text{Sin}\ b \bullet \text{Cos}\ \gamma$

Una grande semplificazione nel calcolo di un triangolo sferico (la semplificazione che mi interessava sottolineare) ci è fornita dal ***Teorema di*** **Legendre**, dal nome del matematico francese **Adrien-Marie *Legendre*** (1752-1833), che afferma: «*Sia dato un triangolo sferico i cui lati «l» siano una piccola frazione del raggio* «r» *della sfera e si assuma il rapporto* «$^l/_r$» *come quantità piccola del* «1° ordine»; *commettendo un errore dell'ordine di* «$(^l/_r)^4$» *gli angoli del triangolo piano che ha i lati della stessa lunghezza dei lati del triangolo sferico si possono derivare dagli angoli di quest'ultimo sottraendo ad ognuno di essi un terzo dell'eccesso sferico.*».



Il ***Teorema di*** **Legendre** può essere applicato per il calcolo dei triangoli geodetici, purchè si rimanga nel ***Campo di Weingarten*** (vedi la Dispensa dello stesso Autore: *Geodesia. Cartografia e Carte topografiche*, in *Quinta digressione*, **Sui campi**, pagina 29), in cui possiamo assumere:

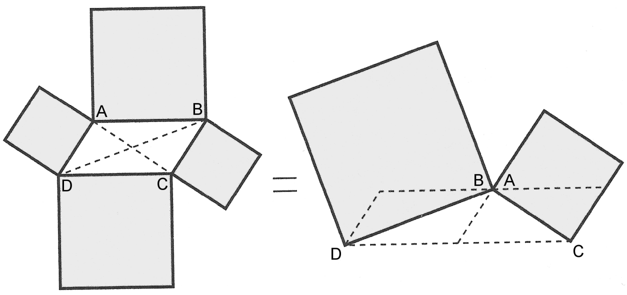
$$\left(\frac{l_{\text{maggiore}}}{R}\right)^4 < 10^{-6}$$

In cui: $l_{maggiore}$ = lato maggiore del triangolo sferico - R = raggio medio della Terra (6 371 km)

Appendice «0f»

La Legge del parallelogramma

Dall'enunciato del *triangolo rettangolo* che stabilisce una relazione fra i *cateti* e l'*ipotenusa* deriva, di conseguenza, quella che è conosciuta come *la legge del parallelogramma*: ***la somma delle aree dei quattro quadrati costruiti sui suoi lati*** ($AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$) ***è uguale alla somma dei due quadrati costruiti sulle sue diagonali*** ($DB^2 + AC^2$).



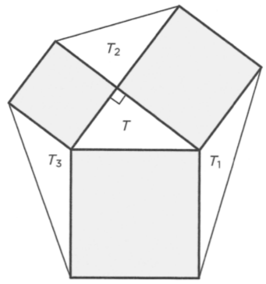
Da notare che i due triangoli (ABC) e (ACD) non sono triangoli rettangoli per cui ***non valgono*** le relazioni ($AB^2 + BC^2 = AC^2$) e ($AD^2 + DC^2 = AC^2$) separatamente, ma, per contro, vale la relazione già posta in evidenza nell'enunciato: ($AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$).

Il teorema di Pitagora nei poligoni

Prendiamo un triangolo rettangolo «T» e costruiamo i quadrati sia sui *cateti* sia sull'*ipotenusa* (in grigio).

Uniamo infine gli spigoli dei quadrati in modo da ottenere la figura a lato, nella quale si ottiene un esagono in cui compaiono tre nuovi triangoli: «T_1», «T_2», «T_3».

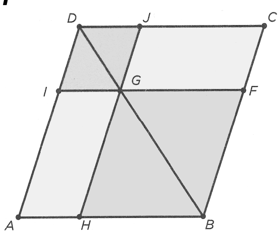
Si può dimostrare che l'area del triangolo «T» è uguale all'area sia del triangolo «T_1» sia di quello «T_2» sia di quello «T_3».



Si ha pertanto: «T» = «T_1» = «T_2» = «T_3»

Lo Gnomone

Come già detto precedentemente, dal **libro II** degli ***Elementi*** di **Euclide**; ***definizione 2***: ***in ogni parallelogramma, si definisce Gnomone uno qualsiasi dei parallelogrammi posti intorno ad una sua diagonale insieme coi due complementi***.

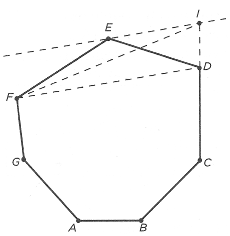


I parellogrammi sia «*DIGJ*» sia «*GHBF*» sono i due parallelogrammi posti intorno alla diagonale «*BD*»; i parallelogrammi sia «*JGFC*» sia «*GHBF*» sono i due parallelogrammi complementi.

Dal **libro I**; ***definizione 43***: ***in ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi posti intorno alla diagonale*** («*JGFC*», «*GHBF*») ***sono uguali***.

Ogni figura poligonale rettilinea è *triangolabile*

Data una figura ***multilatera*** (poligonale), si può procedere, con fasi successive, a ridurre il numero dei suoi lati fino a trasformarla in un triangolo avente la stessa superficie.



Consideriamo il poligono «*ABCDEFG*» ed uniamo due vertici qualsiasi fra quelli separati da un altro vertice; ad esempio, uniamo i vertici «*D*» ed «*F*».

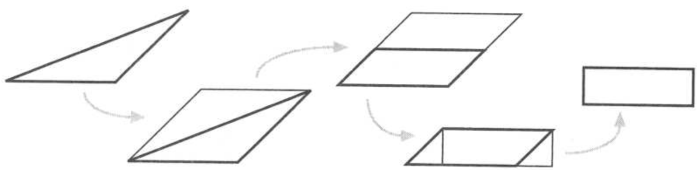
Per il vertice «*E*» tracciamo una parallele al segmento «*DF*» e prolunghiamo il lato «*CD*» fino ad incontrare fino ad incontrare la parallela appena tracciata in «I».

Uniamo infine il vertice «*F*» con il vertice «*I*»; i triangoli «*DEF*» e «*DFI*» sono equivalenti come, ovviamente, lo sono anche le figure poligonali «*ABCDEFG*» e «*ABCDIFG*», ma la seconda figura ha un lato in meno della prima.

Se continuiamo a ripetere il procedimento, arriveremo ad ottenere un triangolo equivalente alla figura poliedrica rettilinea iniziale; di conseguenza possiamo affermare che ogni figura poligonale rettilinea è triangolabile.

. Ogni figura triangolare è *rattangolabile*

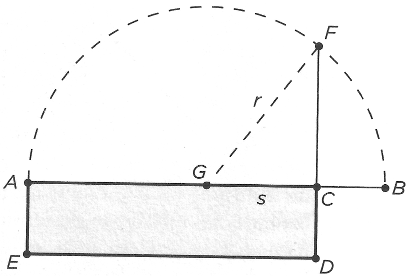
Si può dimostrare, parimenti, che un qualsiasi triangolo può essere trasformato in un rettangolo, ossia qualsiasi triangolo è *rettangonabile*.



La sequenza presentata descrive i passaggi necessari, e sufficienti, per comprendere come è possibile passare da un qualsiasi triangolo ad un equivalente rettangolo.

Ogni figura rettangolare è *quadrabile*

Partiamo da un rettangolo, ad esempio «*ACDE*» e portiamo il lato «*CD*» sul prolungamento del lato «AC» in modo da ottenere il segmento «*AB*».



Dividiamo ora il segmento «*AB*» a metà, nel punto «G», e facendo centro in «*G*», con raggio «*GB*», tracciamo una semicirconferenza da «*B*» ad «*A*».

Prolunghiamo, infine, il lato «*CD*» (o tracciamo la semicorda, a partire da «*C*», perpendicolare ad «*AB*») fino ad incontrare la semicirconferenza appena tracciata in «*F*».

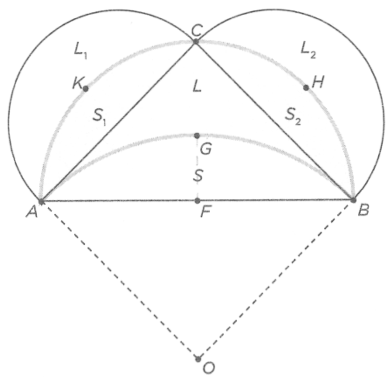
Il segmento «*CF*» è il lato del quadrato equivalente al rettangolo «*ACDE*».

Osservazioni

Da quanto detto ne deriva che: ***ogni figura poliedrica rettilinea è quadrabile***, nel senso che è riducibile ad un quadrato avente la stessa superficie (equivalente).

La Lunula

La ***Lunula***, o ***menisco***, è una figura piana delimitata da due archi di cerchio, di raggio diverso, aventi in comune gli estremi e giacenti dalla stessa parte rispetto alla corda comune.



Con riferimento alla figura, consideriamo sia il triangolo rettangolo isoscele «*AOB*» sia il quarto dell'arco di circonferenza «*AGB*» con centro in «O» e raggio «*OA*» sia il semiarco di circonferenza «*AKCHB*» con centro nel punto medio «*F*», dell'ipotenusa «*AB*», e raggio «*FA*».

«*O*» è il centro del quadrato che ha per lato il segmento «*AB*»; «*OA*» = («*AB*» • √2 / 2).

Il matematico greco **Ippocrate di Ghio**, vissuto nella seconda metà del **V** secolo a.C., dimostrò che l'area della *lunula* «*AHBKC*» è uguale all'area del *triangolo* «*ABC*».

Lo stupore, sia dei contemporanei sia di molti discendenti, per la sorprendente affermazione risalta dalle parole del satrapo macedone **Eudemo**, vissuto nel **III** secolo a.C., che, nel secondo libro della ***Storia della Geometria***, così ha scritto: *«Anche le quadrature delle lunole, per quanto sembrassero riguardar figure non evidentemente quadrabili per la loro affinità col cerchio, furono eseguite da Ippocrate, e apparvero condotte correttamente*».

Ippocrate ha risolto il problema con un ragionamento che attualmente apparirebbe tortuoso e prolisso, noi lo risolveremo col metodo moderno.

Indichiamo con «a» la lunghezza del cateto «OA».

Per il teorema di Pitagora, abbiamo che:

$$AB = a \bullet \sqrt{2},\ BF = \frac{a \bullet \sqrt{2}}{2}.$$

L'area del triangolo «*AOB*», uguale a quella «*ABC*», è: $\frac{a^2}{2}$

L'area della ***lunula*** è la differenza fra le aree del semicerchio «*BHCKA*» e del settore circolare «*BGA*».

Area semicerchio «*BHCKA*» = $\pi \bullet \frac{BF^2}{2} = \pi \bullet \frac{a^2}{4}$

Area settore *BGA* = $\pi \bullet \frac{OA^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \pi \bullet \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$

Area lunula = $\pi \bullet \frac{a^2}{4} - \pi \bullet \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

Come si vede, nel calcolo dell'area della ***lunula***, i due termini $\pi \bullet \frac{a^2}{4}$ si eliminano a vicenda e rimane $\frac{a^2}{2}$, che è proprio l'area del triangolo rettangolo «*ABC*».

Curiosità

La *Lunula* è anche la zona biancastra, a forma di mezzaluna, che è alla base dell'unghia.

Rappresenta la parte visibile della *matrice dell'unghia*, ossia di quell'insieme di cellule epiteliali, situate in corrispondenza della radice dell'unghia, da cui ha origine la *lamina ungueale*; è maggiormente evidente nel pollice, anche se non in tutti è visibile.

Appendice «0g»

I politopi

Definizione

Il ***politopo d-dimensionale*** o ***d-politopo***, nello spazio euclideo «$\mathbb{R}^n$» ad «n» dimensioni è l'analogo del ***poligono*** nel piano «n = 2» e di un ***poliedro*** nello spazio «n = 3».

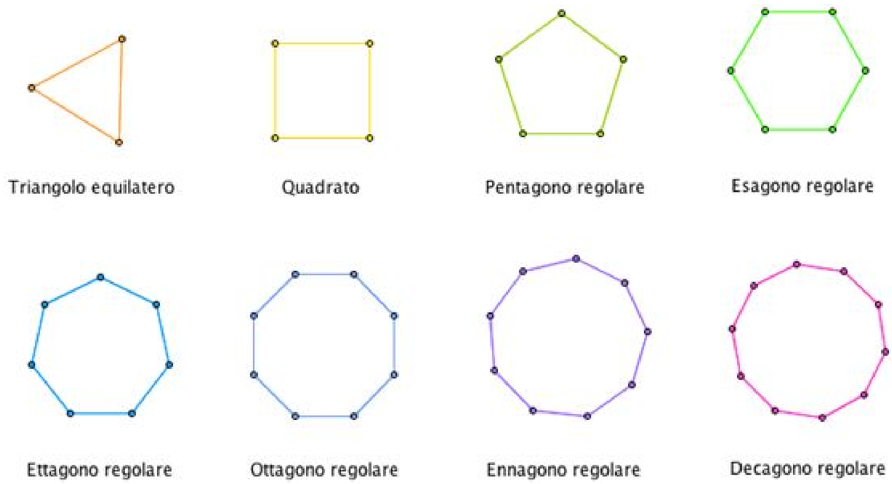
I *poligoni*, pertanto, si possono anche chiamare «2-politopi» ed i *poliedri* «3-politopi»; il termine ***politopo*** è stato coniato dalla matematica irlandese **Alicia Boole Stott** (1860 – 1940), terza figlia del e matematico e logico britannico **George Boole** (1815 – 1864).

I poligoni regolari

I ***poligoni regolari***, dal greco πολύγωνία (πολύς, *polys* = ***molti*** e γωνία, gōnia = ***angolo***), sono ***poligoni convessi*** che sono contemporaneamente equilateri (hanno tutti i lati congruenti fra loro) e equiangoli (hanno tutti gli angoli congruenti fra loro).

Ogni poligono regolare con «n» lati è *inscrivibile* e *circonscrivibile* in due circonferenze.

I poligoni regolari sono infiniti, ma già il triacontagono (n = 30), nel quale ciascun angolo interno ha un'ampiezza di 168°, è praticamente indistinguibile da una circonferenza.



La somma degli angoli interni «Sai» di un *poligono regolare convesso*, di «n» lati, è:

$$\text{Sai} = 180° \bullet (n - 2)$$

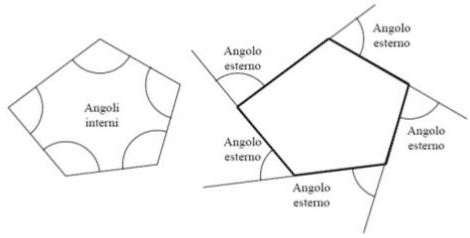
Esempio: per l'esagono (n = 6) si ha: 180° • (6 – 2) = 180° • 4 = 720°.

L'ampiezza di ogni angolo interno «Aai» è uguale a:

$$\text{Aai} = \frac{180° \bullet (n-2)}{n}$$

Esempio: per l'esagono (n = 6) si ha: $^{180° \bullet (6-2)}/_{6} = {}^{720°}/_{6} = 120°$

L'ampiezza di ogni angolo interno aumenta all'aumentare del numero dei lati «n», ma non proporzionalmente ad essi: se il numero dei lati raddoppia, l'ampiezza dell'angolo aumenta, ma non raddoppia.



Vi è infatti un limite all'ampiezza degli angoli interni nei poligoni convessi; esso non può superare i 180°.

In particolare è:

$$\lim_{n\to\infty} 180° \bullet \frac{n-2}{2} = 180°$$

La somma degli angoli esterni «Sae» di un *poligono regolare convesso*, di «n» lati, è sempre 360°, o parimenti:

$$\text{Sae} = (180° \bullet n) - [180° \bullet (n - 2)]$$

Esempio: per l'esagono (n = 6) si ha: (180° • 6) – 720° = 360°

L'apotema di un poligono regolare è il raggio della circonferenza inscritta.

Il numero delle diagonali «d» in ogni poligono, anche non regolare, è uguale a:

$$d = \frac{n \bullet (n-3)}{2}$$

I solidi platonici

I ***poliedri regolari***, dal greco πολύεδρον (πολύς, *polys* = ***molti*** e ἕδρον, *édron* = ***faccia***), possono essere soltanto cinque (in uno spazio tridimensionale), infatti, soltanto il ***triangolo equilatero***, il ***quadrato***, il ***pentagono regolare***, possono essere facce di poliedri regolari.

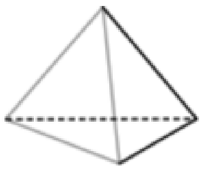
Facce triangolari: gli angoli di un triangolo equilatero sono ampi 60°, quindi in un vertice del solido possono insistere o 3 o 4 o 5 triangoli; si formano, pertanto, e il ***tetraedro*** e l'***ottaedro*** e l'***icosaedro***.

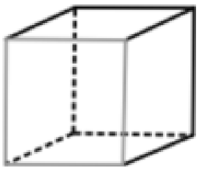
Facce quadrate: gli angoli di un quadrato sono ampi 90°; è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce (3 x 90 = 270) ottenendo un ***esaedro*** o ***cubo***.

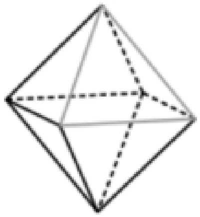
Facce pentagonali: ogni angolo di un pentagono regolare misura 108°; è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce (3 x 108 = 324) ottenendo un ***dodecaedro*** regolare.

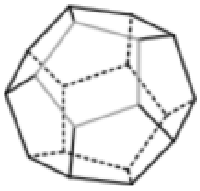
Un poliedro convesso è un solido platonico se:

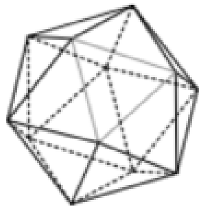
1) tutte le sue facce sono poligoni regolari convessi congruenti.
2) i vertici giacciono tutti su di una sfera
3) nessuna delle sue facce interseca le altre se non negli spigoli.
4) in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce.
5) gli angoli diedri sono tutti uguali

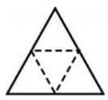
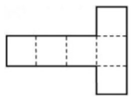
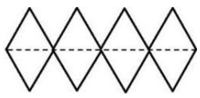
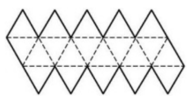
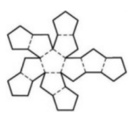

Tetraedro


Esaedro


Ottaedro


Dodecaedro


Icosaedro

Spazio a 3 dimensioni «E_3»						
Poliedro	**Facce «F»**	**Spigoli «S»**	**Vertici «V»**	**Spigoli per ogni Vertice**	**Spigoli per ogni Faccia**	**Sviluppo sul piano**
Tetraedro	4	6	4	3	3	
Cubo	6	12	8	3	4	
Ottaedro	8	12	6	4	3	
Dodecaedro	12	30	20	3	5	
Icosaedro	20	30	12	5	3	

Osservando i dati della tabella si ricava facilmente la seguente relazione:

$$V = S - F + 2$$

Detta formula di **Eulero-Cartesio**, anche se ora è stata posta sotto un'altra forma rispetto a quanto già presentato a pagina 50.

Le idee di Platone sui cinque poliedri regolari

I cinque ***poliedri regolari*** furono oggetto di studio da parte sia del filosofo greco **Pitagora** sia del filosofo greco **Platone**; quest'ultimo, nel **Timeo** (scritto attorno al 360 a.C.), associò a ognuno dei primi quattro poliedri un elemento: al ***tetraedro*** il ***fuoco***, all'***esaedro*** la ***terra***, all'***ottaedro*** l'***aria***, all'***icosaedro*** l'***acqua***,; per questo essi sono anche chiamati *figure cosmiche*.

Il suo solido preferito era il ***dodecaedro*** del qual scrisse: *Restava una quinta combinazione e il Demiurgo (Dio) se ne giovò per decorare l'universo.*

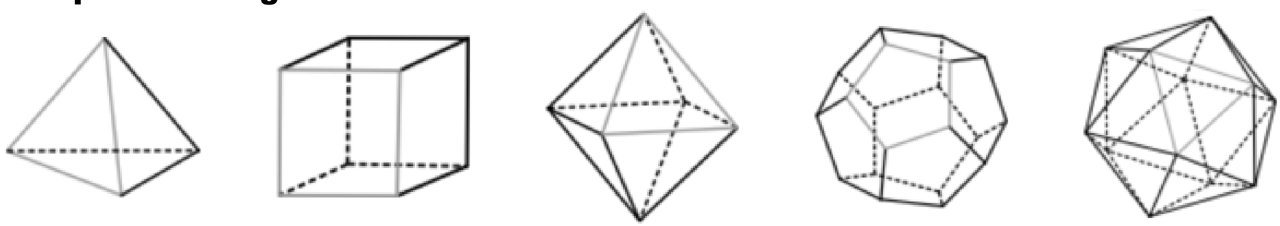
La notazione di Schläfli

In geometria multidimensionale si dice ***notazione di Schläfli*** o ***simbolo di Schläfli*** una notazione che si associa a un *politopo regolare* per presentarne concisamente alcune proprietà più importanti; il termine prende il nome dal matematico svizzero **Ludwig Schläfli** (1814 - 1895) che diede importanti contributi alla geometria multidimensionale e all'analisi.

Ad ogni poliedro regolare è associata una coppia di numeri interi {p,q} dove «p» rappresenta il numero dei lati del poligono regolare utilizzato per costruire il poliedro e «q» rappresenta il numero di poligoni che si incontrano in ogni vertice.

Ad esempio, il dodecaedro regolare è caratterizzato da cinque facce pentagonali, quindi «p = 5», e tre vertici di valenza, quindi «q = 3».

I poliedri regolari



Tetraedro {3, 3} — Esaedro {4, 3} — Ottaedro {3,4} — Dodecaedro {3, 5} — Icosaedro {5, 3}

Nome	Superficie	Volume	Raggio della sfera		
			Inscritta	Circoscritta	Tangente agli spigoli
Tetraedro	$d^2\sqrt{3}$	$d^3\frac{\sqrt{2}}{12}$	$d\frac{\sqrt{6}}{12}$	$d\frac{\sqrt{6}}{4}$	$d\frac{\sqrt{3}}{4}$
Esaedro	$d^2\,6$	d^3	$d\frac{1}{2}$	$d\frac{\sqrt{3}}{2}$	$d\frac{\sqrt{2}}{2}$
Ottaedro	$d^2\,2\sqrt{3}$	$d^3\frac{\sqrt{2}}{3}$	$d\frac{\sqrt{6}}{6}$	$d\frac{\sqrt{2}}{2}$	$d\frac{1}{2}$
Dodecaedro	$d^2\,3\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$d^3\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})$	$d\frac{1}{20}\sqrt{[10(25+11\sqrt{5})]}$	$d\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$d\frac{1}{4}[3+\sqrt{5}]$
Icosaedro	$d^2\,5\sqrt{3}$	$d^3\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})$	$d\frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$	$d\frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$d\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

In cui: d = lunghezza dello spigolo

I prefissi dei nomi dei poliedri

Numero facce	Prefisso
1	mono
2	di
3	tri
4	tetra
5	penta
6	hexa
7	hepta
8	octa
9	ennea
10	deca

Numero facce	Prefisso
11	hendeca
12	dodeca
13	triskaideca
14	tetrakaideca
15	pentakaideca
16	hexakaideca
17	heptakaideca
18	octakaideca
19	enneakaideca
20	icosa

Numero facce	Prefisso
24	icositetra
30	triconta
40	tetraconta
50	pentaconta
60	hexeconta
70	heptaconta
80	octaconta
90	enneaconta
100	hecato

Nello spazio quadrimensionale

Nello ***spazio quadrimensionale*** vi sono sei ***policori regolari***: ipertetraedro (detto anche o 5-cella o pentacoro), ipercubo (o 8-cella), 16-cella, 24-cella, 120-cella, 600-cella.

La ***notazione di Schläfli*** per un policoro regolare ha la forma {p,q,r}; questo dice che esso presenta facce poligonali regolari caratterizzate da *p* lati {*p*}, celle {p,q}, figure poliedrali di vertice {*q*,*r*}, e figure di spigolo poligonali regolari {r}.

Ad esempio la 120-cella è rappresentata dalla notazione {5,3,3}: questo politopo è costituito da celle {5,3} che sono dodecaedri e presenta «3» celle che incidono in ciascuno degli spigoli.

Spazio a 4 dimensioni «E_4»			
Policori	**Facce (F)**	**Vertici (V)**	**Spigoli (S)**
5-cella (ipertetraedro)	4	4	6
8-cella (ipercubo)	8	8	12
16-cella (iperottaedro)	20	12	30
24-cella	6	8	12
120-cella	12	20	30
600-cella	12	20	30

Sull'apotema

Conoscendo il numero di lati «n» si può ricavare il valore dell'apotema «a» per lati di lunghezza «l»:

$$a_n = \frac{l}{2 \bullet \tan\frac{\pi}{2}}$$ (utilizzando le unità angolari radianti)

Da cui, considerando i lati di lunghezza unitaria, derivano due numeri fissi.

Il rapporto $^{\text{apotema}}/_{\text{lato}}$ «f_n», pari a: $f_n = \frac{1}{2 \bullet \tan\frac{180}{n}}$ (utilizzando le unità angolari sessagesimali)

Il rapporto $^{\text{area del poligono}}/_{\text{quadrato del lato}}$ «j_n», paria : $j_n = \frac{n \bullet f_n}{2}$

Poligono	**n**	**f_n**	**j_n**
Triangolo	3	0,289	0,433
Quadrato	4	0,500	1,000
Pentagono	5	0,688	1,720
Esagono	6	0,866	2,598
Ettagono	7	1,038	3,634
Ottagono	8	1,207	4,828
Ennagono	9	1,374	6,182
Decagono	10	1,539	7,694
Endecagono	11	1,703	9,366

Poligono	**n**	**f_n**	**j_n**
Dodecagono	12	1,539	11,196
Tridecagono	13	2,029	13,186
Tetradecagono	14	2,191	15,335
Pentadecagono	15	2,352	17,642
Esadecagono	16	2,514	20,109
Ettadecagono	17	2,675	22,736
Ottadecagono	18	2,836	25,521
Ennadecagono	19	2,996	28,465
Icosagono	20	3,157	31,569

Appendice «0h»

I poliedri di Keplero-Poinsot

Definizione

I ***poliedri di Keplero-Poinsot*** o ***solidi di Keplero-Poinsot*** sono poliedri regolari non convessi, in cui tutte le facce sono formate da identici poligoni regolari, includendo tra essi anche i poligoni stellati, e che hanno lo stesso numero di facce che si incontrano in un medesimo vertice.

Abbandonando la richiesta della convessità, oltre ai cinque *solidi platonici* si possono costruire altri quattro poliedri.

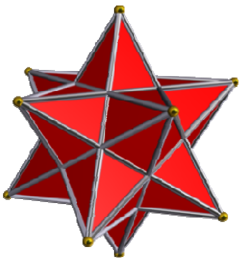
Due sono i cosiddetti ***poliedri di Keplero*** aventi come eponimo e l'astronomo ed il matematico e cosmologo e filosofo della natura e teologo luterano tedesco **Giovanni Keplero** (1571-1630) (**Johannes Kepler**); hanno come facce poligoni regolari stellati.

Due i cosiddetti ***poliedri di Poinsot***, aventi come eponimo il e matematico e fisico francese **Louis Poinsot** (1777-1859); sono costruiti in modo che le facce possano interpenetrarsi.

Curiosità

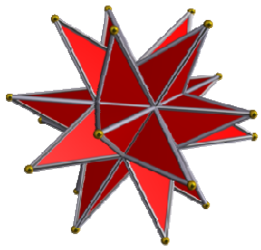
L'**eponimo** (dal greco ἐπώνυμος, composto di ἐπί, «sopra», e ὄνομα, «nome»; cioè «*soprannominatore*») è o una divinità o un eroe o un personaggio, sia esso reale o fittizio, che dà il suo nome o ad una città o ad un luogo geografico o ad una dinastia o ad un periodo storico o ad un movimento artistico o ad un . . ..

I poliedri di Keplero:



Piccolo dodecaedro stellato

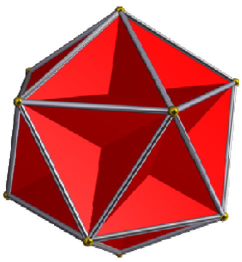
Il piccolo dodecaedro stellato che ha come facce 12 pentagoni stellati, ha 12 vertici e 30 spigoli.



Grande dodecaedro stellato

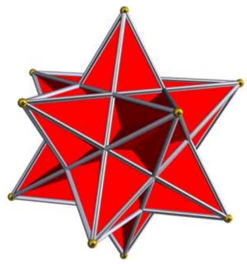
Il grande dodecaedro stellato che ha ancora come facce 12 pentagoni stellati, ha 20 vertici e 30 spigoli.

I *poliedri di Poinsot*:



Grande dodecaedro

il grande dodecaedro che ha 12 facce a forma di pentagoni regolari, ha 12 vertici e 30 spigoli.



Grande icosaedro

il grande icosaedro ha che ha 20 facce a forma di triangoli equilateri, ha 12 vertici e 30 spigoli.

Denotando con «F» il numero delle *facce* di un poliedro, con «S» il numero dei suoi *spigoli*, con «V» il numero dei suoi *vertici*, con «N» il numero dei *lati di ciascuna sua faccia*, con «M» il numero degli *spigoli che incidono in ciascun suo vertice*, le caratteristiche dei ***poliedri di Keplero-Poinsot*** possono essere riassunte nella seguente tabella sintetizza.

Nome	F	S	V	N	M
Piccolo dodecaedro stellato	12	30	12	5	5
Grande dodecaedro stellato	12	30	20	5	3
Grande dodecaedro	12	30	12	5	5
Grande icosaedro	20	30	12	3	5

Un altro poliedro stellato

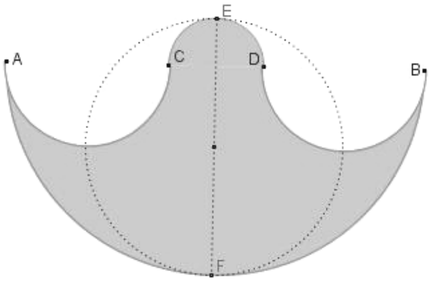
La nozione di poliedro regolare si può estendere per comprendere i cosiddetti ***poliedri intrecciati*** o ***poliedri composti***, poliedri per i quali cade il requisito che due vertici possano sempre collegarsi attraverso un cammino fatto da spigoli) e per i quali la regolarità consiste nell'invarianza rispetto al gruppo delle rotazioni che permutano opportunamente l'insieme dei suoi vertici.

Appendice «0i»

Strane figure geometriche

Il Salinon di Archimede

Il ***Salinon*** (o la Saliera) di Archimede è stata ideata dall'insigne scienziato siracusano **Archimede di Siracusa**, in greco antico: Ἀρχιμήδης, *Archimédēs* (287 a.C. - 212 a.C.); essa e' una figura geometrica piana, delimitata da 4 semicirconferenze individuate dagli estremi del diametro della circonferenza maggiore «AB» e da due punti fissati sul diametro equidistanti da questi estremi.



Costruzione

Sul diametro «AB» di una qualsiasi circonferenza si fissano due punti e «C» e «D» equidistanti e da «A» e da «B»(la distanza è a piacere).

Si costruiscono, quindi, tre semicirconferenze di diametro rispettivamente «AB», «AC», «DB», e successivamente una quarta «CD»; le semicirconferenze «AC», «DB», dalla stessa parte rispetto alla semicirconferenza «AB», mentre la semicirconferenza «CD» dalla parte opposta rispetto al diametro «AB».

La Saliera è la figura in grigio delimitata dalle quattro semicirconferenze.

Proprietà

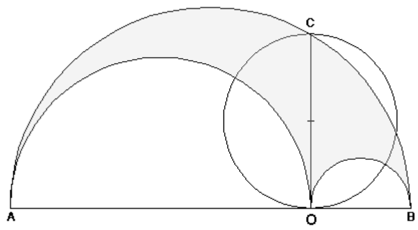
Il suo perimetro «ACEDBFA» è uguale alla lunghezza della circonferenza di diametro «AB»; la sua area dipende dalla lunghezza del segmento «CD», infatti, la saliera è equivalente al cerchio di diametro «EF».

L'arbelo

L'***arbelo*** è forse la prima figura che prende il nome da oggetti di uso quotidiano, in particolare da attrezzi artigianali o contadini. Il termine *arbelo* deriva dal greco e indica il "trincetto da calzolaio".

Costruzione

Sul diametro «AB» di un semicerchio si fissa un punto qualsiasi «O», e si descrivono le due semicirconferenze interne al semicerchio dato e aventi come diametro rispettivamente «AO» e «OB».



La figura in grigio che ne risulta, limitata dalle 3 semicirconferenze, è stata oggetto di studio da parte di **Archimede di Siracusa**.

L'arbelo è la figura in grigio delimitata dalle tre semicirconferenze

Proprietà

L'area della parte in grigio è uguale all'area del cerchio «CO», con «CO» perpendicolare a «AB».

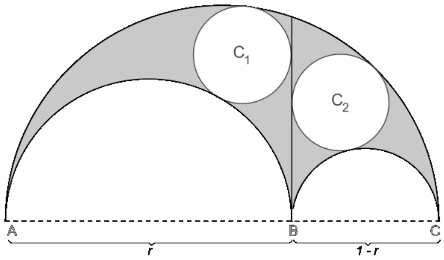
I cerchi gemelli

In geometria piana, i **cerchi gemelli di Archimede**, creati per la prima volta dal matematico greco **Archimede di Siracusa**, sono una coppia di cerchi notevoli che possono essere costruiti all'interno di un *arbelo*.

Costruzione

La base per la costruzione dei ***cerchi gemelli di Archimede*** è un *arbelo*.

Viene inizialmente tracciata una perpendicolare ad «AC» passante per la cuspide interna «B» dell'arbelo.



I ***cerchi gemelli di Archimede*** vengono quindi costruiti tangenti a quest'ultima perpendicolare e alla semicirconferenza esterna; «C_1» è inoltre tangente al semicerchio interno più grande, mentre «C_2» al semicerchio interno più piccolo.

Ognuno dei due cerchi è univocamente determinato dalle tre condizioni di tangenza, e la loro costruzione è un caso particolare di risoluzione del *problema di Apollonio* dal nome del matematico greco **Apollonio di Perga** (262 a.C. - 190 a.C.),

Proprietà

Assumendo il diametro «AC» pari all'unità e definendo «s = $^{AB}/_{AC}$», il raggio dei due cerchi è calcolabile con la:

$$\rho = \frac{s}{2} \bullet (1 - s)$$

Assumendo il diametro «AC» pari all'unità e considerando i raggi delle due semicirconferenze interne pari a: «a = $^{AB}/_{2}$», «b = $^{BC}/_{2}$», secondo la **Proposizione 5** del «*Libro dei Lemmi*» di **Archimede**, il diametro della semicirconferenza esterna risulterà pari a «a + b», mentre il diametro di ogni cerchio gemello «r» sarà:

$$\rho = \frac{a \bullet b}{a + b}$$

Il cerchio di Bankoff

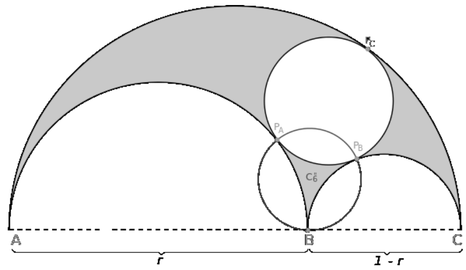
In geometria, il **cerchio di Bankoff** è un tipo notevole di *cerchio di Archimede* che può essere costruito a partire da un *arbelo;* la prima costruzione del cerchio di Bankoff è attribuita al matematico (e dentista) statunitense **Leon Bankoff** (1908 - 1997).

Precisazioni

Viene definito ***cerchio di Archimede*** qualsiasi cerchio di area pari ad ognuno dei due cerchi gemelli di Archimede.

Costruzione

Il ***cerchio di Bankoff*** viene costruito a partire da un *arbelo*; viene disegnato un cerchio completo «C_1» all'interno dell'arbelo e tangente ai tre semicerchi nei punti P_A, P_B e P_C.



Il *cerchio di Bankoff* viene infine costruito imponendone il passaggio per tre punti: i due punti di tangenza del cerchio «C_1» con le semicirconferenze interne dell'arbelo, e la cuspide interna dell'arbelo stesso.

Proprietà

Il *cerchio di Bankoff* costruito a partire da un arbelo ha la proprietà di essere congruente a ciascuno dei due *cerchi gemelli di Archimede* costruiti a partire dallo stesso *arbelo*.

Assumendo il diametro «AC» pari all'unità e definendo «s = $^{AB}/_{AC}$», il raggio del cerchio è calcolabile con la:

$$\rho = \frac{s}{2} \bullet (1 - s)$$

L'ippopede

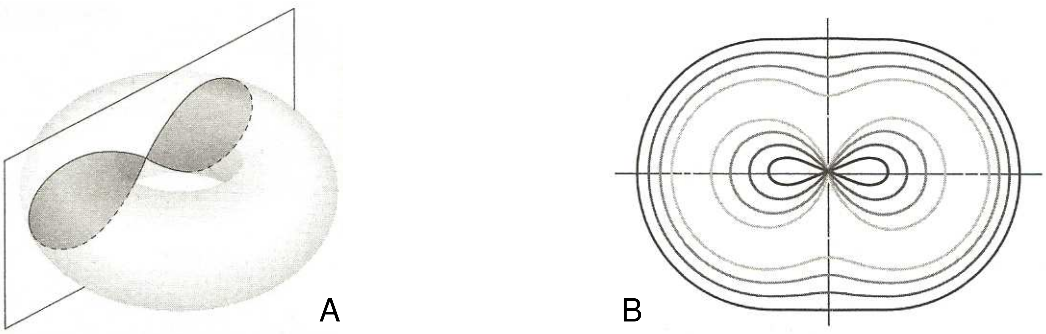
Un ***ippopede*** è una curva piana che può essere generata dall'intersezione di un ***piano*** con un **toro**, ove il *piano* è parallelo all'asse del *toro*; se il raggio minore del toro è «r» è il suo raggio maggiore è «R», la curva risultante può essere espressa in coordinate cartesiane come.

$$(x^2 + y^2)^2 + 4 \bullet r \bullet (r - R) \bullet (x^2 + y^2) = 4 \bullet r^2 \bullet x^2$$

Si tratta di una famiglia di curve algebriche razionali bi circolari di quarto grado simmetriche rispetto ai loro due assi.

Il primo matematico di cui si hanno notizie certe che studiò queste curve fu il e matematico ed astronomo greco **Eudosso di Cnido** (in greco antico: Εὔδοξος ο Κνίδιος (408 a.C. – 355 a.C.),

Nella figura «B» seguente sono rappresentati alcuni esempi di ippopede.



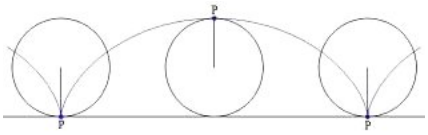
A) generazione di un appopede mediante l'intersezione di un ***piano*** con un ***toro***.
B) famiglia di curve ippopedi per il caso: r > 0,2, R < 2.

Appendice «0I»

Curiosità su alcune curve notevoli

La Cicloide

La ***cicloide*** (dal greco *kykloeidés*: *kýklos* «cerchio» e *oeidés* «forma», ovvero *che è fatto da un cerchio*), è una curva piana appartenente alla categoria delle ***rullette***; essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che *rotola* lungo una retta.



La *cicloide* fu studiata per la prima volta dal matematico **Nicola Cusano** (1401 – 1464), noto anche come o **Niccolò Cusano** o **Niccolò da Cusa,** e ricevette il suo nome dallo scienziato **Galileo Galilei** (1564 – 1642) nel 1599; si dedicarono allo studio di questa particolare *curva* anche altri e matematici e scienziati, quali: **Evangelista Torricelli** (1608 – 1647), **Pierre de Fermat** (1601 – 1665), **René de Scartes**, latinizzato in **Renatus Cartesius** e italianizzato in **Renato Cartesio** (1596 – 1650), **Christiaan Huygens** (1629 – 1695), **Johann I Bernoulli** o **Jean I Bernoulli** (1667 – 1748), **Isaac Newton** (1642 – 1727).

Proprietà geometriche

Sia l'evoluta sia l'involuta della cicloide sono a loro volta due cicloidi identiche.

Risolve il problema della ***brachistocrona***, ovvero: la curva su cui una massa, che scivola, impiega meno tempo per percorrere il tragitto fra due punti dati, è un arco di cicloide.

È la curva che risolve il problema della ***tautocrona***, ovvero: le oscillazioni su di un arco di cicloide sono esattamente isocrone, e non solo approssimativamente come in un pendolo semplice.

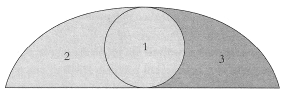
Le dimensioni di una *cicloide* sono strettamente legate alla dimensione della circonferenza generatrice:

L'altezza massima dell'arco è pari al suo diametro, pertanto: h = 2 • r.

La lunghezza di un arco di cicloide è «4» volte il diametro, pertanto, l'altezza è: 4 • h.

La base sottostante l'arco è pari alla circonferenza, pertanto: π • h.

L'area compresa fra un arco di cicloide e la base è «3» volte l'area del cerchio, pertanto: 3 • π • r^2.

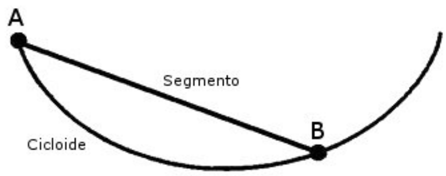


La curva Brachistocroma

Siano «A» e «B» due punti fissati.

Consideriamo una massa puntiforme «M» che si muove, in un piano verticale, su una guida curva che connette i due punti «A» e «B».

La massa «M» è soggetta alla forza peso e, pertanto, il tempo che «M» impiega per andare dal punto «A» al punto «B», con velocità iniziale nulla, dipende dalla traiettoria che compie, che è determinata, a sua volta, dalla forma della guida.



Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, il tempo non è minimo se la guida è di lunghezza minima fra «A» e «B», cioè una guida rettilinea, quella denominata ***segmento*** in figura.

La curva, per contro, che permette alla particella di andare dal punto «A» al punto «B» nel minor tempo possibile è chiamata ***brachistocrona***, ossia curva del ***tempo più corto***, e la sua determinazione è un esempio classico di problema che si risolve con il calcolo delle variazioni; la soluzione del problema è la curva denominata ***cicloide ordinaria***, che passa per i due punti «A» e «B».

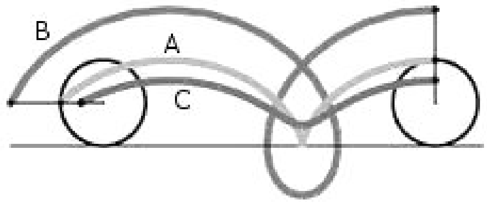
La curva Tautocroma

La ***curva tautocroma*** o ***curva isocroma*** (dai prefissi greci: tauto, o «*stesso senso*» o «iso *uguale*» e crono «*tempo*») è sempre una *cicloide ordinaria*, a base orizzontale, concava verso l'alto, sulla quale una sfera, qualunque sia il suo punto di partenza, arriva al punto della posizione più bassa nel medesimo tempo.

Il problema della ***tautocrona***, ovvero il tentativo di individuare questo tipo di curva, è stato brillantemente risolto da **Christiaan Huygensnel**; nel 1659, ha, infatti, dimostrato geometricamente, nella sua opera «***oscillatorium Horologium***», originariamente pubblicata nel 1673, che la curva era una cicloide.

Variazioni sul tema

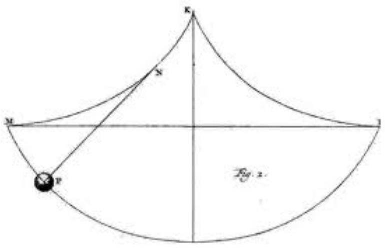
Quando la circonferenza mobile rotola su di una retta si parla sempre di cicloide o ordinaria (curva «A») o allungata (curva «B») o accorciata (curva «C») a seconda che il punto, solidale alla circonferenza mobile, disti dal centro, di detta circonferenza, una distanza o pari o maggiore o minore del raggio.



La cicloide ordinaria ha delle cuspidi, quella allungata ha delle asole, quella accorciata si presenta come una curva ondulata.

Il Pendolo cicloidale

Il ***pendolo cicloidale*** è un tipo di moto periodico ideato da **Christiaan Huygens**, intorno al 1659, che possiede una peculiare proprietà: le sue oscillazioni sono isocrone indipendentemente dalla loro ampiezza.



Si è visto, infatti, che questo vale, nel caso del *pendolo semplice*, solo per ampiezze abbastanza piccole; **Huygens** dimostrò invece che un punto materiale che oscilla seguendo una traiettoria cicloidale sotto l'azione della gravità ha un periodo costante che dipende unicamente dalle dimensioni della cicloide.

L'ingegnosa soluzione trovata da Huygens fu di accostare due ganasce di profilo cicloidale dalla cui cuspide far oscillare un pendolo.

Poiché l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide, il pendolo descriverà una traiettoria cicloidale; per la proprietà di ***tutocronia***, le oscillazioni di un pendolo così fatto saranno perfettamente isocrone, qualsiasi sia la loro ampiezza.

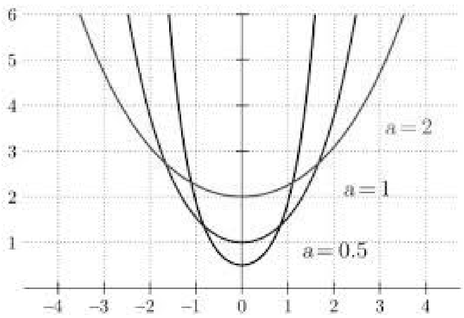
Le oscillazioni del pendolo sono e *isocrone* e *armoniche* di periodo:

$$T = 2 \bullet \pi \sqrt{\frac{4 \bullet a}{g}}$$

In cui: T = periodo delle oscillazioni, espresso in secondi «s» - a = lunghezza del filo che trattiene la massa oscillante – g = accelerazione di gravità.

La Catenaria

La ***catenaria***, detta anche *funicolare*, è la curva secondo cui si dispone una fune che supponiamo e pesante e omogenea e flessibile e inestensibile, appesa ai due punti estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.



In considerazione del fatto che una catenaria ha la proprietà di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale, questo tipo di curva è stata spesso utilizzata per realizzare manufatti e strutture architettoniche.

In figura, le diverse curve ottenute per diversi valori del parametro «a».

La *catenaria* è una curva trascendente, che ammette la seguente equazione cartesiana:

$$y = a \bullet \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a \bullet \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$$

In cui: a = costante che rappresenta la distanza del punto più basso dall'ordinata zero – e = base dei logaritmi naturali.

Dall'equazione, si nota che la curva non dipende dalla distanza dei punti cui è appesa la fune; la curva è simmetrica rispetto all'asse «y».

Il primo ad occuparsi della *catenaria* fu lo scienziato italiano **Galileo Galilei** (1564 – 1642) nel 1638, pensando erroneamente che la forma di una fune, appesa per i suoi estremi e soggetta alla sola la forza di gravità, fosse una parabola.

Nel 1669, **Joachim Jungius** (1587 – 1657) dimostrò che, la curva in questione, non era una parabola e poi, nel 1691, e **Christiaan Huygens** e **Gottfried Wilhelm von Leibniz** e i fratelli **Bernoulli**, dimostrarono che questa era una curva non algebrica, e fu battezzata *catenaria* dallo stesso **Huygens**.

Fra le caratteristiche peculiari della catenaria, **Eulero** trovò che la superficie laterale del solido di rotazione, generato da una catenaria che ruota attorno all´asse «x» (la ***catenoide***), è la superficie minima tra due circonferenze della stessa grandezza; la superficie di rotazione della catenaria è l´unica superficie di rotazione, insieme al piano, ad essere superficie minima.

Questa particolarità la si può verificare immergendo, in una vasca piena di acqua e sapone, due circonferenze uguali distanziate; la bolla di sapone che si formerà si disporrà in modo di avere la superficie minima, e questa avrà proprio la forma di una ***catenoide***.

Anche la sezione orizzontale di una vela, sotto l´azione del vento, assume la forma di una *catenaria*, e per questo la curva è anche nota come ***velaria***.

Numerose infine sono le applicazioni in vari ambiti dell´architettura: infatti, poiché la catenaria ha la proprietà di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale, essa è stata spesso utilizzata per realizzare manufatti e strutture architettoniche.

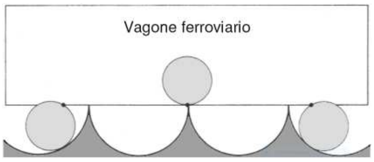
Le strutture realizzate secondo tale curva subiscono soltanto sforzi a trazione, come le funi di sostegno nei ponti sospesi, oppure, in alternativa, a compressione, quando la struttura realizzata ha la forma di una *catenaria rovesciata*, come nelle strutture a cupola.

Ne sono un esempio, la cupola della cattedrale di ***St. Paul*** a Londra, progettata da **Robert Hooke** (1635 – 1703), colui che studiò le leggi dell´elasticità, e la ***Sagrada Familia*** a Barcellona, progettata da **Antoni Gaudì i Cornet** (1852 – 1926).

Numerosi ponti, inoltre, sono stati realizzati con la struttura di una *catenaria rovesciata* tra cui ricordiamo il famoso ponte di ***Santa Trinita*** a Firenze; citiamo, infine, il famoso ***Gateway Arch*** dell´architetto finlandese **Euro Saarinen** (1910 – 1961), posto nel parco dello *Jefferson National Expansion Memorial*.

Una particolare Ipocicloide

Sappiamo (vedi: **La Cicloide**, pag. 60) che un punto situato su una circonferenza che rotola su una retta descrive una cicloide; potremmo ora chiederci lungo quale tipo di curva dovrebbe essere fatto rotolare un cerchio in modo che un punto situato sulla sua circonferenza tracci una linea retta?



Se immaginiamo un vagone ferroviario le cui ruote sono fissate con l'asse sul suo bordo, quale dovrebbe essere la forma delle ruotare perché questo vagone, fatto ruotare su di esse, resti orizzontale?

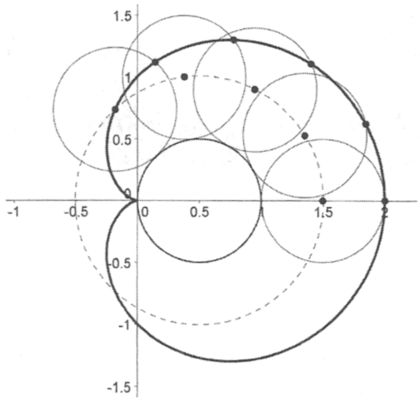
La risposta giunge, forse, inaspettata: una serie di semicechi.

Se un cerchio viene fatto ruotare all'interno di un arco circolare, un punto, sulla sua circonferenza, genera una curva che si chiama **ipocicloide**.

Nel caso il raggio di una rotaia circolare sia doppio di quello del cerchio rotolante, come nel nostro caso, l'ipocicloide diviene una retta.

La Cardioide

Il ***cardioide*** (dal greco *kardioeides*: *kardia* «cuore» e *eidos* «forma», ovvero *a forma di cuore*) appartiene alle curve denominate o *chiocciola* o *limaçon* di Pascal, in onore al loro scopritore **Étienne Pascal** (1588 - 1651); il nome fu adottato per la prima volta, nel 1741, dal matematico di origine pisana **Giovanni Francesco Melchiorre Salvemini** detto o il **Castiglione** o **Castillioneus** o **Johann Castillon** (1704 - 1791).



la *cardioide* è una curva geometrica, più precisamente è una *epicicloide*, con una e una sola *cuspide*; essa è una curva che si può ottenere tracciando il percorso di un punto scelto su una circonferenza che viene fatta rotolare, senza scivolamenti, intorno ad un'altra circonferenza di raggio uguale, e mantenuta fissa.

La *cardioide* può anche essere vista come un caso particolare di *limaçon*.

L'equazione cartesiana, della cardioide rappresentata, è:

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = (x + y^2)$$

Mentre, la sua equazione polare, è:

$$r = 1 + \cos\theta$$

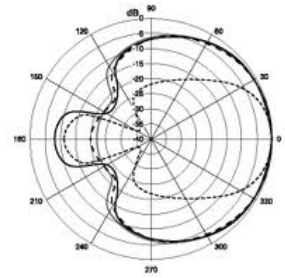
La *cardioide* presentata ha una peculiarità nel punto in (0, 0), chiamato matematicamente ***punto di retrocessione***; si genera facendo ruotare, senza scivolare, una circonferenza di raggio «a» intorno ad un'altra uguale, fissa, con centro nel punto (a, 0).

Nella cardioide considerata si ha «a = 0.5», pertanto, la circonferenza fissa ha raggio «0.5» e centro in (0.5, 0).

Dall'equazione: $r = 2 \bullet a\,(1 + \cos\theta)$

Si ottiene: lunghezza della curva «s = 8 • a», area compresa nella curva «$A = 6 \bullet \pi \bullet r^2$».

La curva cardioide potrebbe apparire, ad una prima analisi superficiale, un'inutile invenzione (o scoperta?) teorica; analizzandola più a fondo si scopre, per contro, che contiene inaspettati risvolti pratici, sia tecnici sia curiosi.



Il ***microfono cardioide*** è un microfono unidirezionale in cui l'aspetto del diagramma polare risultante (il diagramma della *sensibilità spaziale* del microfono) è quello caratteristico a forma di cuore, con la maggiore sensibilità nella direzione frontale, e nessuna sensibilità nella direzione posteriore; i suoni all'interno di questo spazio sono captati, mentre al di fuori sono notevolmente attenuati.

Supercardioide, ***Ipercardioide*** sono microfoni in cui questa caratteristica polare è ancora più spinta.

I microfoni unidirezionali, tipo cardioide, riducono il rischio dell'**effetto Larsen**, dal nome del fisico **Søren Absalon Larsen** (1871 – 1957) che per primo ne scoprì il principio, detto anche ***feedback* acustico**; è il tipico fischio stridente che si sviluppa quando i suoni emessi da un altoparlante ritornano ad essere captati, con sufficiente ***potenza di innesco***, dal microfono.

Questa curva, già studiata da **Albrecht Dürer** (1471 - 1528), si presta anche all'analisi di situazioni ludiche: un'*avvenente* ragazza, il cui *girovita* è una circonferenza perfetta, sta giocando col suo *hula-hop*, il cui diametro è doppio di quello del suo *vitino*.

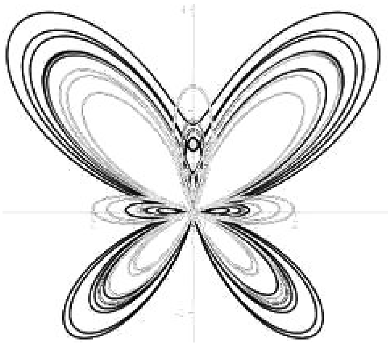
Per mera curiosità, con un pennarello, fa un segno sull'*hula-hop* e si chiede che tipo di curva descriva la traiettoria di quel punto, mentre lei fa girare l'*hula-hop* attorno a se stessa; la risposta forse è già stata intuita dai più perspicaci: è una ***cardioide***.

La Farfalla di Fay

La ***curva a farfalla*** è una curva, piana trascendentale, scoperta da **Temple H. Fay** (pronunciato **Fie**), nel 1989.

L'equazione, in coordinate polari, è:

$$r = e^{\cos\theta} - 2 \bullet \cos(4 \bullet \theta) + \mathrm{sen}^5\left(\frac{2 \bullet \theta - \pi}{24}\right)$$



In effetti, le due figure, un poco si somigliano.

Appendice «0m»

La legge di Benford

Probabilità della prima cifra

La **distribuzione di Benford** meglio nota come **legge di Benford** o **legge della prima cifra** è una distribuzione di probabilità che descrive la probabilità che un numero presente in molte raccolte di dati reali (come ad esempio: quotazione delle azioni, costanti e fisiche e matematiche, popolazione dei comuni, numero di strade esistenti nelle località) cominci con una data cifra; la funzione di probabilità è data da:

$$P(n) = \log_{10}(1+n) - \log_{10}(n) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

In cui: n = numero (dall'uno al nove) che rappresenta la prima cifra.

Curiosità

Nel 1881, in «American Journal of Mathematics», è stata descritta quella che dovrebbe essere la scoperta del matematico e astronomo statunitense **Simon Newcomb** (1835 - 1909).

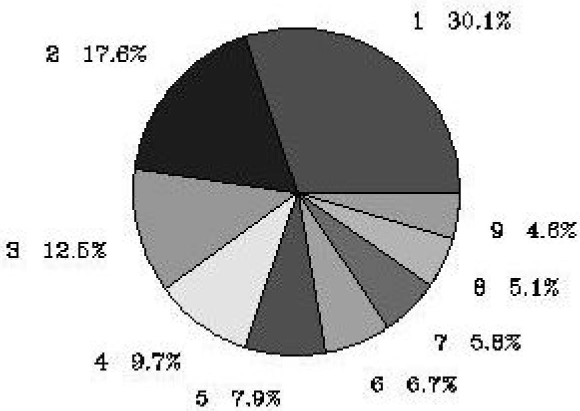
Si narra, ma forse è soltanto una leggenda metropolitana, che ***Newcomb*** notò che nelle tavole le pagine dei logaritmi che contenevano le tabelle con la cifra «1», quale prima cifra, erano molto più sporche delle altre, possibilmente perché usate più frequentemente.

In seguito, e il fisico ed l'ingegnere statunitense **Frank Albert Benford** (1843 - 1948), scoprì la legge matematica che porta il suo nome.

Prima cifra	
n	P(n) %
1	30,1
2	17,6
3	12,5
4	9,7
5	7,9
6	6,7
7	5,8
8	5,1
9	4,6

Prime due cifre	
n	P(n) %
10	4,1
11	3,8
12	3,5
13	3,2
. . .	. . .
96	0,450
97	0,436
98	0,441
99	0,436

Distribuzione delle varie cifre iniziali



Una delle estensioni della ***legge di Benford*** prende in considerazione la coppia delle prime due cifre (da 10 a 99 dunque), lasciando invariata la formula, ma modificandone solo l'intervallo di validità, da [1,9] a [10,99].

Tuttavia, è necessaria una certa prudenza prima di applicare la legge di Benford, in quanto solo un insieme di numeri scelti a caso da una data variabile casuale obbedisce a tale legge, mentre in un insieme di dati *reali*, in cui siano stati imposti dei limiti, anche in modo inconsapevole, può, ma non deve, seguire tale *legge*.

Curiosità

Nel 1972, **Hal Varian suggerì** la possibilità di utilizzare questa legge per individuare eventuali falsificazioni nelle raccolte di dati usate per sostenere decisioni politiche

Nel 1992 **Mark Nigrini** propose l'utilizzo di questa variabile casuale per mettere alla prova la credibilità delle scritture contabili.

Appendice «0n»

Il test del χ^2 quadro

Premessa

La prova del χ^2 è un procedimento statistico che dice se i risultati ottenuti differiscono, o no, in maniera significativa da quelli che ci si sarebbero aspettati.

Vediamo come utilizzarlo con qualche esempio.

Il lancio di una moneta

Lanciando in aria una moneta per 100 volte otteniamo 60 volte testa e 40 volte croce: vogliamo stabilire se la moneta è bilanciata o se è lecito presumere che una delle due face è avvantaggiata rispetto all'altra?

Iniziamo col fare una tabella sia dei risultati osservati (O) sia dei risultati che ci si aspetta (A) secondo il calcolo delle probabilità:

	O	A
Teste	60	50
Croci	40	50

Calcoliamo la statistica del χ^2, che è una misura della discrepanza fra i risultati osservati e i risultati attesi; maggiore è il valore della statistica χ^2, maggiore è la discrepanza.

Il valore del χ^2 quantifica la differenza fra i dati osservati e quelli attesi, ed è la somma delle quattro celle a, b, c e d, per ciascuna delle quali si calcola il valore della frazione:

Per ognuna delle variabili (testa e croce) Calcoliamo:

$$x = \frac{(dato\ osservato - dato\ atteso)^2}{dato\ atteso}$$

e sommiamo i rispettivi risultati.

La formula risolutiva è:

$$\chi^2 = x_{teste} + x_{croci}$$

Che nel nostro caso diviene:

$$\chi^2 = \left(\frac{(O-A)^2}{A}\right)_{teste} + \left(\frac{(O-A)^2}{A}\right)_{croci} = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = 4{,}0$$

Sapendo che nel lancio di una moneta vi è un solo grado di libertà, poiché soltanto una variabile può essere scelta liberamente; se una è specificata (60 teste), non vi è alcuna libertà di scelta per l'altra (devono essere 40 croci).

Tabella dei valori χ^2

Gradi di libertà	Probabilità	
	1%	5%
1	6,635	3,841
2	9,210	5,991
3	11,345	7,815
4	13,277	9,488
5	15,086	11,070
6	16,812	12,592

Consultando la **Tabella dei valori χ^2**, troviamo che per *un grado* di libertà il valore della statistica è: $\chi 2 = 3{,}841$

Ora, confrontando il valore di $\chi 2$ «$\chi 2 = 4{,}0$» con quello tabulato, noti che esso è >3,841 e <6,635; ciò consente di ritenere che la differenza fra i due gruppi sia significativa al livello di probabilità del 5%, anche se non lo è al livello di probabilità del 1%.

In altre parole: *ammettendo che le due facce abbiano la stessa probabilità di comparire* e ripetendo l'esperimento infinite volte, potremo osservare piuttosto raramente (ossia 5 volte su 100, o meno!) dati simili a quelli ottenuti.

In sostanza: in base ai risultati del test del χ^2, l'affermazione «*la moneta non è equilibrata*» ha il 95% di probabilità di essere vera, e pertanto ha solo il 5% di probabilità di essere falsa).

Appendice «0o»

La successione di Fibonacci

Premessa

In matematica, la **successione di Fibonacci**, dal nome del matematico pisano **Leonardo Fibonacci** (1175 - 1235), viene indicata o con «***Fn***» o con «***Fib(n)***»; è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti e i primi due termini della successione sono per definizione $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Tale successione ha quindi una definizione ricorsiva secondo la seguente regola:

$F_1 = 1$
$F_2 = 1$
$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ (per ogni n > 2)

Gli elementi «F_n» sono anche detti *numeri di Fibonacci*.

I primi termini della successione di Fibonacci sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, . . .

Il rapporto $\frac{F_m}{F_{m-1}}$ (rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo precedente), per «***n***» tendente all'infinito, tende al numero algebrico irrazionale «ϕ» chiamato o ***sezione aurea*** o ***numero di* Fidia**, dal nome dell'architetto ateniese **Fidia**, in greco antico: Φειδίας, *Pheidías* (490 a.C. *circa* - 430 a.C. *circa*).

In termini matematici: $lim_{n\to\infty} \frac{F_m}{F_{m-1}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Il rapporto $\frac{F_m}{F_{m+1}}$ (rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo successivo), per «***n***» tendente all'infinito, tende al numero algebrico irrazionale reciproco di «ϕ».

Ricordiamo:

ϕ = 1,618 033 988 749 894 848 . . .
$\frac{1}{\phi}$ = 0,618 033 988 749 894 848 . . .

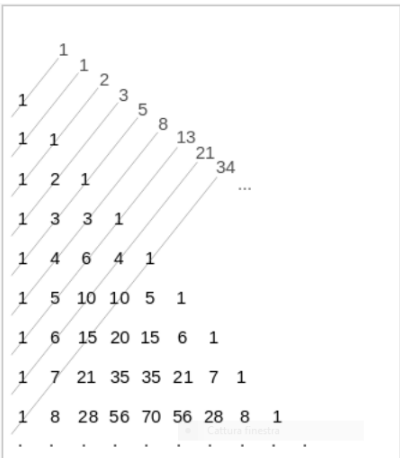
Da cui si ha, che l'***n***-esimo ***numero di Fibonacci***, si può esprimere con la formula di binet, dal nome del e matematico ed astronomo francese **Jacques Philippe Marie Binet** (1786 – 1856).

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Il rapporto $\frac{F_m}{F_{m-2}}$ (rapporto fra un numero di Fibonacci per il secondo che lo precede), per «***n***» tendente all'infinito, tende al numero algebrico irrazionale 2,618 033 988 . . ., che è il quadrato di 1,618 033 988 . . ..

Alcune altre proprietà

Per mostrare che esiste una relazione tra il ***triangolo di Tartaglia***, dal nome del matematico italiano **Niccolò Fontana** (1499 - 1557), noto come **Niccolò Tartaglia** a causa della sua balbuzie, e i ***numeri di Fibonacci***, riscriviamo i numeri del triangolo nel seguente modo:



Come si vede, a partire dalla prima linea in alto, se si sommano i numeri attraversati da ogni linea, si ottiene la successione di Fibonacci.

♦ Se dividiamo qualsiasi numero per il secondo che lo precede nella sequenza $\frac{F_m}{F_{m-2}}$, otterremo sempre, come risultato, il valore due «2» (la parte intera), e come resto il numero immediatamente precedente il divisore «F_{n-3}».

Per esempio: $\frac{283}{89}$ = 2,617 977 528 . . ., con il resto di 233 − 2 •89 = 55

♦ La somma di tutti i numeri della serie di Fibonacci fino ad un determinato punto scelto $\sum_{j=1}^{j=n} F_j$, più uno (1), è uguale al numero di Fibonacci situato due posti in avanti «F_{n+2}».

Per esempio: 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 1 = 21

Ogni numero di Fibonacci corrisponde alla somma dei numeri che lo precedono eccetto l'ultimo, aumentata di 1.

Per esempio: 5 = 1 + 1 + 2 + 1
89 = 1 + 1+ 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 +1

♦La somma partendo da 1, dei quadrati dei numeri della serie di Fibonacci, fino ad un punto qualsiasi $\sum_{j=1}^{j=n} F_j{}^2$, è uguale all'ultimo numero considerato «Fn» moltiplicato per il successivo «F_{n+1}».

Per esempio: 12 + 12 + 22 + 32 + 52 = 40, ed è anche 5 • 8 = 40.

♦Dati quattro numeri di Fibonacci consecutivi «F_n, F_{n+1}, F_{n+2} F_{n+3}», il prodotto del primo col quarto è sempre pari al prodotto del secondo col terzo o aumentato o diminuito di «1», ovvero «$F_n \cdot F_{n+3} = F_{n+1} \cdot F_{n+2} \pm 1$».

Per esempio: 8, 13, 21, 34 8 • 34 = 272 13 • 21 - 1= 272
13, 21, 34, 55 13 • 55 = 715 21 • 34 + 1= 715

Prendiamo quattro numeri di Fibonacci consecutivi «F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}», e consideriamo un triangolo rettangolo con cateti «a», «b» e ipotenusa «c».

Allora, se «a» è uguale al prodotto dei termini esterni «$F_n \cdot F_{n+3}$» e «b» è uguale al doppio del prodotto dei termini interni «$2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2}$», anche «c» è un numero di Fibonacci; inoltre l'area del triangolo «A = a • $^b/_2$» sarà uguale al prodotto dei quattro numeri consecutivi,ovvero «A = $F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2} \cdot F_{n+3}$».

Per esempio: Prendiamo i numeri: «3, 5, 8, 13»

Allora: a = 3 • 13 = 39 b = 2 • 5 • 8 = 80

$$c = \sqrt{39^2 + 80^2} = \sqrt{1\,521 + 6\,400} = \sqrt{7\,921} = 89$$

che è l'undicesimo numero di Fibonacci.

L'area del triangolo sarà: a • $^b/_2$ = 39 • $^{80}/_2$ = 3 • 5 • 8 • 13 = 1 560

♦Il quadrato di un numero di Fibonacci «$F_n{}^2$» meno il quadrato del secondo numero precedente «$F_{n-2}{}^2$» è sempre un numero della successione.

Per esempio: 132 - 52 = 144, che è un numero di fibonacci.

Il quadrato di un qualsiasi numero della serie di Fibonacci «$F_n{}^2$» è uguale al numero che lo precede, per il numero che lo segue, più o meno «1» «$F_n{}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1$»; il più o meno si alterna lungo la sequenza.

Per esempio: 82 = 64, ed è anche 5 • 13 - 1 = 64.
342 = 1 156, ed è anche 21 • 55 + 1 = 1 156

♦Gli unici numeri di Fibonacci che sono anche quadrati sono «1», «144».

Appendice «0p»

Le Spirali

Definizione

La ***spirale*** viene definita come il luogo piano di un punto che, partendo dall'estremo di un raggio o semiretta, si sposta uniformemente lungo questo raggio mentre il raggio a sua volta ruota uniformemente intorno al suo estremo.

La spirale archimedea

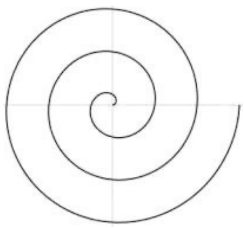
La ***spirale archimedea***, o ***spirale d'Archimedea***, fu ideata (o scoperta) da **Archimede di Siracusa**; essa è una curva trascendentale che può essere descritta, in coordinate polari (r, θ), dalla seguente equazione:

$$r(\theta) = a + b \bullet \theta$$

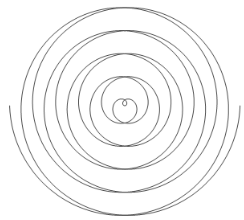
In cui: a = numero reale - b numero reale posit ivo «b > 0».

La spirale di Archimede rappresenta la traiettoria che descrive un punto movendosi di moto rettilineo uniforme su una semiretta che ruota a velocità costante intorno all'origine; la modifica del parametro «a» ruota la spirale, mentre il parametro «b» controlla la distanza fra i bracci.

La curva viene generalmente rappresentata con i valori di «θ» compresi nell'intervallo (0, +∞) [fig. a], mentre in [fig. b] si può vedere la rappresentazione della curva con i valori di «θ» compresi nell'intervallo (-∞, +∞).



[fig. a]



[fig. b]

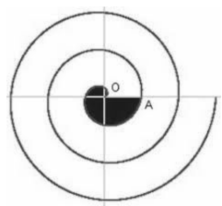
Una salsiccia arrotolata su se stessa e pronta per essere posta sulla brace su una *cardiga* (graticola) è un'*ottima* spirale d'Archimede.

Una delle deduzioni più profonde, presenti nell'opera «Sulle spirali», è presente nella preposizione inerente la spirale archimedea: «*L'area limitata dalla prima spira della spirale e dalla semiretta iniziale è uguale a un terzo del primo cerchio.*».

$$A = \frac{1}{3} \bullet \pi \bullet (2 \bullet \pi \bullet a)^2$$

La prima spira è l'arco di spirale compreso tra il polo «O» ed il punto «A» di coordinate polari «A = (*2 •* p *• a*, *2 •* p)», mentre la semiretta iniziale è la semiretta OA.

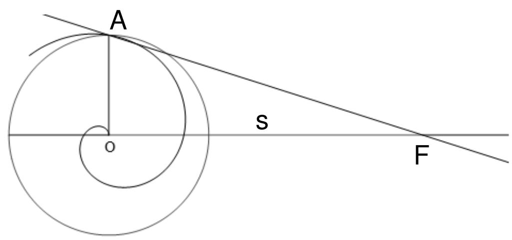
Il primo cerchio è il cerchio di raggio «OA» e quindi l'area limitata dalla prima spira della spirale e dalla semiretta iniziale è uguale ad «A»; la dimostrazione è stata fatta utilizzando il metodo di ***esaustione***, mentre nell'ultima parte Archimede ricorre alla dimostrazione per assurdo.



Rettificazione della circonferenza

Si consideri il così detto primo cerchio di Archimede. e si tracci la retta «s» normale al raggio «OA» del primo cerchio e passante per l'origine della spirale «O»; si consideri, poi, la retta tangente alla spirale in «A» che interseca la retta «s» in un punto che chiamiamo «F».

Archimede dimostra che il segmento «OF» è la rettificazione della circonferenza del cerchio di raggio «OA».



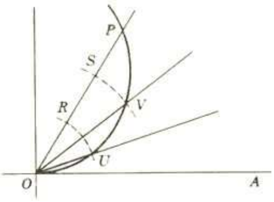
Così facendo, Archimede, sposta il problema della rettificazione della circonferenza a quello di tracciare la tangente alla spirale, cosa che con il solo uso di riga e compasso è impossibile.

Trisezione di un angolo

La spirale d'Archimede fornisce una delle soluzioni per il problema della ***trisezione di un angolo***.

L'angolo «AOP» è disposto in modo che il vertice coincida con l'origine «O» ed uno dei lati coincida con la posizione iniziale «OA» della semiretta che ruota.

L'altro lato dell'angolo intersecherà la spirale in «P» individuando



il segmento «OP»; il segmento «OP» viene diviso in tre parti uguali individuando i punti e «R» e «S».

Quindi si tracciano degli archi aventi centro in «O» e raggi rispettivamente e «OR» e «OS»; questi ultimi intersecano la spirale rispettivamente nei punti e «U» e «V».

Le linee e «OU».e «OV» trisecheranno l'angolo «AOP».

Con questo metodo ogni angolo può essere diviso in un numero qualsiasi di parti uguali.

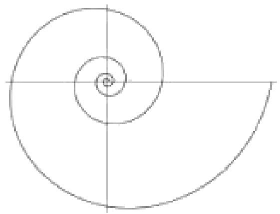
La spirale logaritmica

La ***spirale logaritmica*** o ***spirale equiangolare*** o ***spirale di crescita*** è un tipo particolare di spirale descritta la prima volta dal matematico e filosofo francese **René Descartes**, nel 1638; in seguito venne analizzata da **Torricelli** nell'opera «***De inf init is spiral ibus***» e successivamente indagata estesamente da **Jakob Bernoulli**, che la definì *Spira mirabilis*. Può essere descritta, in coordinate polari (r, θ), dalla seguente equazione:

$r(\theta) = a \bullet e^{b \bullet \theta}$ oppure $\theta = \frac{1}{b} \bullet \ln\left(\frac{r}{a}\right)$ da cui il nome logaritmica

In cui: a = numero reale - e = base dei logaritmi naturali - b = numero reale

La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine; il passo della *spira mirabilis*, ovvero il segmento di distanza tra spire successive, a differenza della spirale di Archimede, non è costante.



La spirale logaritmica è definita proporzionale; ogni raggio vettore sarà più ampio del precedente secondo un rapporto costante, facendo sì che la curva crescendo non cambi forma.

In particolare le distanze tra i bracci della spirale aumentano secondo una progressione geometrica, per questo talvolta la curva è chiamata spirale *geometrica* o *proporzionale*.

La spirale logaritmica non raggiunge mai il polo, poiché il centro della spirale è un punto asintotico (proseguendo l'ingrandimento verso il centro si ritrovano infinite spirali identiche in scala ridotta); allo stesso modo allontanandosi sempre di più dall'origine aumentano le dimensioni della spirale, ma essa è sempre somigliante a se stessa.

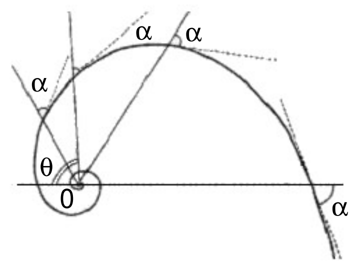
L'aggettivo "*meravigliosa*" dato da **Bernoulli** si riferisce proprio al fatto che essa non ha né inizio né fine; la proprietà per cui la curva esegue infinite evoluzioni verso e dal suo polo è detta *auto-somiglianza*.

Curiosità

Verso la fine del **XVII** secolo, il matematico svizzero **Jakob Bermoulli** (1654 - 1705), noto anche come **Jacques Bernoulli** o **Giacomo Bernoulli**, scoprì molte proprietà della spirale logaritmica e ne rimase talmente affascinato che espresse il desiderio di averne una scolpita sulla sua pietra tombale, accompagnata dalla scritta latina «***Eadem mutata resurgo*** (Sebbene cambiata, rinasco identica)».

Purtroppo la spirale che ancora oggi è visibile sulla lapide del matematico, a Basilea, è una spirale di Archimede e la scritta, per contro, non è presente.

Proprietà

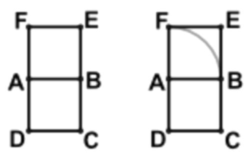


L'appellativo ***equiangolare***, che talvolta è attribuito alla spirale logaritmica, l'è stato attribuito da **Descartes** e rispecchia una sua proprietà unica: «***Ogni semiretta passante per il polo forma con la retta tangente alla spirale logaritmica in un punto lo stesso angolo*** a».

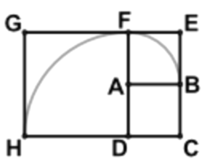
La spirale di Fibonacci

Costruzione

Iniziamo col disegnare un quadrato di lato «1» di vertici «A, B, C, D» e affianchiamoli, sul lato «AB = 1» un'altro quadrato, sempre di lato «1» di vertici «A, B, E, F».

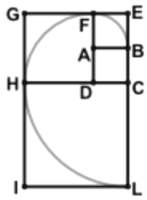


Puntiamo un compasso in «A», con apertura «AB», e tracciamo l'arco di circonferenza «BF».

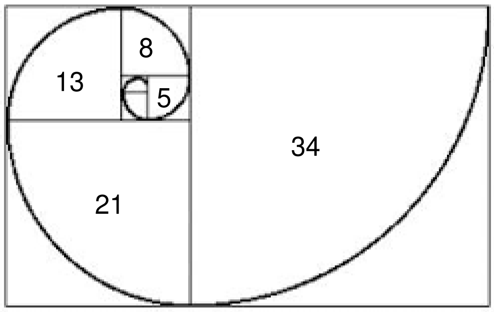


Costruiamo, sul lato «FD = 2», un nuovo quadrato di vertici «F, D, H, G»; puntiamo il compasso in «D», con apertura «DF», e tracciamo l'arco di circonferenza «FH».

Costruiamo poi, sul lato «CH = 3», un ulteriore quadrato di vertici «C, H, I, L»; puntiamo il compasso in «C», con apertura «CI», e tracciamo l'arco di circonferenza «HL».



Iterando questo procedimento per un numero qualsivoglia di volte, anche all'infinito, si ottiene una spirale che è un'ottima approssimazione della *spirale aurea* che analizzeremo in seguito; tale approssimazione è così buona che ad occhio non si noterebbe alcuna differenza fra le due spirali.



Il nome *spirale di Fibonacci* deriva dalla costatazione che le dimensioni dei vari quadrati, che si disegnano nei successivi passaggi, durante la costruzione della spirale, sono tutti termini della *successione di Fibonacci*.

La spirale aurea

In geometria, la ***spirale aurea*** è una spirale logaritmica con fattore di accrescimento «b» di crescita pari a «f» (sezione aurea); l'equazione polare di una *spirale aurea* è la stessa delle altre spirali logaritmiche, ma con un particolare valore di «b».

$r(\theta) = a \bullet e^{b \bullet \theta}$ oppure $\theta = \frac{1}{b} \bullet \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

In cui: a = numero reale positivo - e = base dei logaritmi naturali - b = numero reale

Il numero reale «b» è tale che quando «θ» è un angolo retto, si ha:

$e^{b \bullet \theta_{retto}} = \Phi$ per cui «b» è dato da: $b = \frac{\ln(\Phi)}{\theta_{retto}}$

Il valore numerico di «b» varia a seconda che l'angolo retto sia misurato come «90°» o come «$^{\pi}/_{2}$» radianti; e dato che l'angolo può essere in ogni direzione, è più semplice scrivere la formula per il valore assoluto di «b» (ovvero, «b» può anche essere il negativo del suo valore):

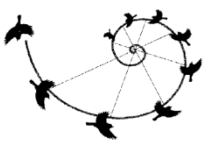
$$|b| = \frac{\ln \Phi}{90} = 0{,}005\,346\,798$$

$$|b| = \frac{\ln \Phi}{\frac{\pi}{2}} = 0{,}306\,348\,962$$

La spirale aurea in natura

La natura ama le spirali logaritmiche; i nautili, da miliardi di anni negli oceani, crescono secondo una spirale aurea.

Anche i fossili, come i foraminiferi e le ammoniti, possiedono questa forma e le immagini ai ***raggi* X** della struttura interna di questi fossili mostrano come la forma interna della spirale logaritmica sia rimasta sostanzialmente immutata per milioni di anni.



Il falco pellegrino, uno dei predatori più temibili e per la vista acuta e per l'abilità di volo, sfrutta le proprietà della spirale avvicinandosi alla sua preda secondo una *spirale aurea*.

Sorprendentemente anche elementi naturali inorganici rimandano alla *spirale aurea*; i cicloni tropicali, ma anche i tornado sia terrestri che marini, assumono la forma di immense spirali aurea.

Ed ancora

Le corna di un ariete crescono seguendo l'andamento di una *spirale aurea*.

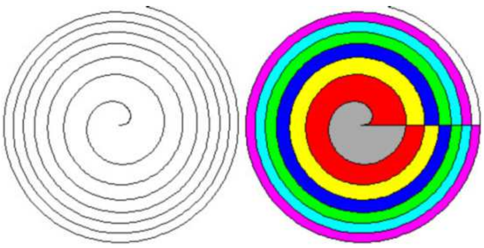
I semi di girasole crescono lungo due serie contrapposte di spirali logaritmiche; il numero delle spirali, in senso orario e in senso antiorario, dipende dalle dimensioni del fiore.

Il cavolo romano presenta una crescita frattale delle sue infiorescenze secondo una *spirale aurea*.

La doppia elica del **DNA** segue una doppia *spirale aurea*.

La spirale di Fermat

La ***spirale di Fermat*** (conosciuta anche come spirale parabolica) fu descritta dal matematico francese **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) nel 1636 e segue l'equazione in coordinate polari:



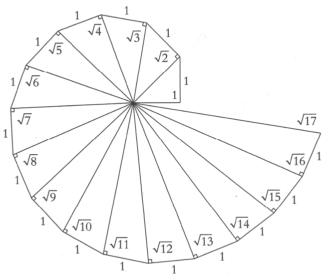
$$\rho^2 = k^2 \bullet \theta \qquad\qquad \rho = k \bullet \sqrt{\theta}$$

In cui: k = costante reale non nulla.

In questa spirale tutte le spire hanno la stessa area; nel disegno, le spire di colori diversi contengono ognuna la stessa superficie.

La spirale di Teodoro

La ***spirale di Teodoro***, dal nome del matematico greco **Teodoro di Cirene** (465 a.C. circa - ?), non è una vera e propria spirale, anche se ho deciso di presentarla fra queste, e non è neanche certo che sia stato **Teodoro** a disegnarla per primo.



Per molto tempo la «√2» è stato l'unico numero irrazionale conosciuto.

Nel famoso dialogo ***Teeto*** (in greco Θεαίτητος), collocabile fra il 386 a.C. ed il 367 a.C., il filosofo greco **Platone** afferma che **Teodoro**, suo maestro di matematica, fu il primo a dimostrare, intorno al 425 a.C., l'irrazionalità di altre radici quadrate; per far questo prese in considerazione le seguenti grandezze:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{35},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14},\ \sqrt{15},\ \sqrt{17}$$

Il ***teorema di Pitagora*** permette di disegnare tutte le redici quadrate dei numeri naturali in una *spirale* determinata da triangoli rettangoli.

Nella figura, si può osservare che la «√2» è la diagonale del quadrato di lati «1», la «√3» è la diagonale (l'ipotenusa) del rettangolo di lati «1 - √2», la «√4» è la diagonale del rettangolo di lati «1 - √3» e cosi via, la serie dei numeri «√n» continua in modo concatenato.

Questo metodo *ricorrente* di generare rettangoli di lato «1 - √n» fa si che le progressioni di «√n» abbiano ricevuto la denominazione di ***proporzioni dinamiche***:

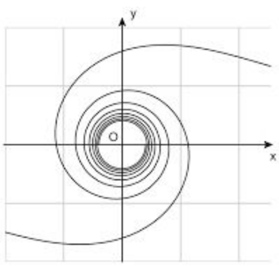
Il lituo

Il lituo è una figura piana, della famiglia delle spirali, la cui l'anomalia «θ» è inversamente proporzionale al quadrato del raggio vettore «ρ»; in coordinate polari l'equazione, in coordinate piane, è:

$$k = \rho^2 \bullet \theta \qquad\qquad \rho = \sqrt{\frac{k}{\theta}}$$

In cui: «k» = costante reale non nulla.

Il nome gli è stato attribuito dal matematico inglese **Roger Cotes** (1682 – 1716) nella sua opera postuma ***Harmonia mensurarum*** (Armonia delle misure, 1722) e proviene dal termine ***lituus*** che indicava il bastone dal manico ricurvo utilizzato dagli **Auguri**.



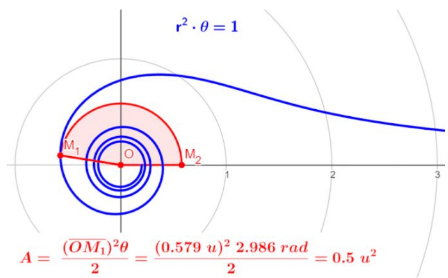
Il *lituo* è composto da due rami, uno corrispondente ai valori positivi di «ρ» e l'altro corrispondente ai valori negativi.

L'asse polare di equazione «θ = k • π», per ogni k ∈ ℤ (ℤ = insieme dei numeri interi) è un asintoto; parimenti lo è il polo del riferimento «0, θ», nel senso che per «ρ → 0»il lituo tende a tale punto.

Costatando che l'area «A» del settore circolare è:

$$A = \frac{1}{2}\rho^2 \bullet \theta$$

Il lituo può essere definito anche come: il luogo dei punti individuato da un punto «P» che si muove in modo tale che l'area di un *settore circolare* di raggio «OP», con «O» origine degli assi cartesiani, rimane costante all'aumentare dell'angolo.



Supponiamo che «M_1» sia un punto sulla curva, e «M_2» un punto posto sull'asintoto a distanza «OM_1» dall'ori-gine «O».

L'area del settore circolare «OM_1M_2» rimarrebbe costante mentre «M_1» si sposterebbe verso il centro, sulla curva.

Un'immagine chiarificatrice è riportata al termine della pagina precedente a destra.

Precisazioni

Il **settore circolare** è la parte di un cerchio racchiusa fra un arco e i raggi che hanno un estremo negli estremi dell'arco della circonferenza.

Oppure

Il ***lituo*** era anche una sorta di bastone rituale con un'estremità ricurva, usato nell'antica Roma per delimitare idealmente uno spazio (*templum*) nel quale si sarebbero dovuti osservare gli auspici, ossia i segni augurali (per lo più il volo di uccelli); era lo strumento liturgico e l'insegna dei sacerdoti detti ***auguri***.

Appendice «0q»

Paradossi algebrici

Si vuole dimostrare che: 1 = -1

Sia data l'eguaglianza: **$(-1)^2 = 1$**

Prendendo i logaritmi dei due membri, in una stessa base «b», si ha:

$$2 \bullet \log_b -1 = \log_b 1$$

Poiché «$\log_b 1 = 0$», si ha:

$$2 \bullet \log_b -1 = 0$$

Dividendo per «2» ambo i membri, si ha:

$$\log_b -1 = 0$$

Dalla definizione di logaritmo, otteniamo:

$$b^0 = -1$$

Sapendo che «$b^0 = 1$», si ha pertanto:

1 = -1

Si vuole dimostrare che: 2 = 3

Consideriamo l'evidente eguaglianza: **4 - 10 = 9 – 15**

Essa si può anche scrivere:

$$2^2 - 2 \bullet 2 \bullet \frac{5}{2} = 3^2 - 2 \bullet 3 \bullet \frac{5}{2}$$

Aggiungendo $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$ ad entrambi i membri, si ha:

$$2^2 - 2 \bullet 2 \bullet \frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \bullet 3 \bullet \frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

Considerando che «$a^2 - 2 \bullet a \bullet b + b^2 = (a-b)^2$» si ottiene:

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

Estraendo la radice quadrata da ambo i membri, si ha:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

Pertanto:

2 = 3

Si vuole dimostrare che: 2 = 1

Consideriamo la seguente uguaglianza: **a = b**

Moltiplicando per «*a*» i due membri, si ha:

$$a^2 = a \bullet b$$

Sottraendo «b^2», da ambedue i membri, si ottiene:

$$a^2 - b^2 = a \bullet b - b^2$$

Ossia:

$$(a+b) \bullet (a-b) = b \bullet (a-b)$$

Dividendo, entrambi i membri per «a – b», si ha:

$$a + b = b$$

Sostituendo «b» ad «a» (poiché a = b), si ottiene:

$$b + b = b$$

Per cui ricaviamo: $2 \bullet b = b$

Da cui, dividendo entrambi i membri per «b», otteniamo:

2 = 1

Un paradosso un poco più complesso.

Si vuole dimostrare che: 4 = 8

Consideriamo la ben nota formula trigonometrica: $\mathbf{sen^2\,\chi + cos^2\,\chi = 1}$

Dalla quale si ha:

$$\text{sen}^2\,\chi = 1 - \cos^2\chi$$

Innalzando ambedue i membri alla potenza di $\frac{3}{2}$, si ha:

$$(\cos^2\chi)^{\frac{3}{2}} = (1 - \text{sen}^2\,\chi)^{\frac{3}{2}}$$

L'uguaglianza, può essere posta anche sotto diversa forma, e diviene:

$$[(cos^2\,\chi)^{\frac{1}{2}}]^3 = cos^3\,\chi = (1 - \text{sen}^2\,\chi)^{\frac{3}{2}}$$

Aggiungendo «3» ad entrambi gli ultimi due termini, si ha:

$$cos^3\,\chi + 3 = (1 - \text{sen}^2\,\chi)^{\frac{3}{2}} + 3$$

Moltiplichiamo ambo i termini per «2», e otteniamo:

$$2 \bullet (cos^3\,\chi + 3) = 2 \bullet \left[(1 - \text{sen}^2\,\chi)^{\frac{3}{2}} + 3\right]$$

Supponendo che «$\chi = \pi$», si ha:

$$2 \bullet (cos^3\,\pi + 3) = 2 \bullet \left[(1 - \text{sen}^2\,\pi)^{\frac{3}{2}} + 3\right]$$

Ricordando che: $\cos\pi = -1$, $\cos^3\pi = -1$, $\text{sen}\,\pi = 0$, $\text{sen}^3\,\pi = 0$

L'ultima equazione diventa:

$$2 \bullet (-1 + 3) = 2 \bullet \left[(1 - 0)^{\frac{3}{2}} + 3\right]$$

Da cui:

$$2 \bullet 2 = 2 \bullet (1 + 3)$$

Pertanto:

4 = 8

Si vuole dimostrare ancora che: 1 = -1

Dall'ovvia uguaglianza

$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

Ne deriva:

$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$ da cui $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$ da cui $\sqrt{1} \bullet \sqrt{1} = \sqrt{-1} \bullet \sqrt{-1}$

Per cui: 1 = -1

Si vuole dimostrare ancora che 1 = -1

Consideriamo la seguente, evidente, uguaglianza: $\mathbf{\sqrt{-1} = \sqrt{-1}}$

L'uguaglianza precedente può essere posta anche sotto la forma:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

Da cui, si ha anche:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \qquad \text{od anche} \qquad \sqrt{1} : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : \sqrt{1}$$

Moltiplicando fra loro e gli estremi ed i medi, si ottiene:

$$\sqrt{1} \bullet \sqrt{1} = \sqrt{-1} \bullet \sqrt{-1} \qquad \left(\sqrt{1}\right)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$$

Estraendo la radice quadrata da ambo i membri, si ha infine:

1 = -1

Un paradosso algebrico poco leale:

Poniamo: a + b = 2c **$a \neq b$**

Allora, ne consegue che:

$(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$
$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$
$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$
$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$
$(a - c)^2 = (b - c)^2$
$a = b$

Si vuole dimostrare che: 9 = 5

A tal uopo impostiamo l'uguaglianza:

$9^2 - 5^2 = 56 = 2 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 7 \cdot 5$
$9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 = 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5$
$9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 + 7^2 = 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 + 7^2$
$(9 - 7)^2 = (5 - 7)^2$
$(9 - 7) = (5 - 7)$
$9 = 5$

Un numero periodico, forse

Sia n = 30; prendete una calcolatrice e calcolate la seguente formula:

$$f(n) = \frac{\sqrt{\frac{9}{121} \bullet 100^{n} + \frac{(121 - 44 + n)}{121}}}{10^{n-1}}$$

Otterrete un numero periodico: 0,27272727...=27/99; come è possibile che il risultato di questa radice possa essere un numero periodico e quindi un numero razionale?

L'euro mancante

Tre amici si recano al bar ed ordinano tre whisky di buona marca.
Costatato che il conto fa 25 €, ciascuno di loro, non avendo monete, da 10 €.
Il barista, correttamente, restituisce cinque monete da 1 € ciascuna.
A questo punto ciascuno si riprende 1 €, lasciando gli altri 2 € di mancia.
Uscendo, però, uno di loro ha un dubbio atroce: ciascuno di noi a dato 10 € e se ne ripreso 1 €, ergo a pagato 9 €.
Noi siamo tre, 3 • 9 = 27 € più i 2 € lasciati di mancia fanno 29 €.
Che fine ha fatto l'euro mancante?

Una divisione impossibile

Un beduino che possedeva soltanto diciassette (17) cammelli, alla sua morte li lasciò in eredità ai suoi tre (3) figli; sul testamento scrisse: Al maggiore lascio la metà «$^1/_2$» dei miei beni, al medio ne lascio un terzo «$^1/_3$», al minore ne lascio un mezzo «$^1/_9$».

I tre figli fecero subito i calcoli ed ottennero:

$$\frac{17}{2} = 8{,}5 \qquad \frac{17}{3} = 5{,}\overline{6} = \frac{56-5}{9} = \frac{51}{9} \qquad \frac{17}{9} = 1{,}\overline{8} = \frac{18-1}{9} = \frac{17}{9}$$

Non volendo uccidere alcun cammello e non trovando alcuna soluzione, chiamarono il saggio della tribù che, provenendo da un posto che nessuno conosce, andò da loro in groppa al proprio cammello.

Giunto dai tre fratelli, in saggio unì il proprio cammello ai cammelli lasciati in eredità dal beduino ottenendo un gruppo di diciotto (18) cammelli.

Eseguì, quindi, la suddivisione:

$$\frac{18}{2} = 9 \qquad \frac{18}{3} = 6 \qquad \frac{18}{9} = 2$$

I tre fratelli furono tutti molto soddisfatti, avendo ottenuto più di quanto avevano calcolato spettasse a ciascuno, ma rimasero alquanto esterrefatti quando si resero conto che: 9 + 6 + 2 = 17; il saggio montò, pertanto, sul suo cammello e si avviò verso i suoi sconosciuti lidi.

Qualcuno ne ha capito qualche cosa?

Ma forse ho commesso qualche errore, da qualche parte! Ma dove?
Bo! Cioè, credo, forse . . . non lo so!

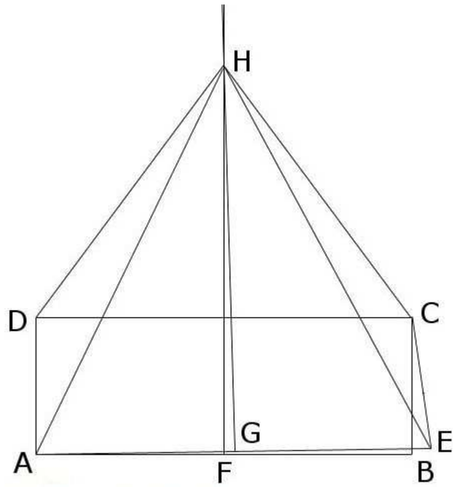
***A voi, l'ardua sentenza*.**

Appendice «0r»

Paradossi geometrici

Quando un angolo retto è anche ottuso

Partiamo dal rettangolo «ABCD».



Dal vertice «C» si traccia un segmento «CE» uguale a «BC» e, conseguentemente, anche uguale a «AD».

Si unisce il vertice «A» col vertice «E» tracciando il segmento «AE»; il vertice «E» non può trovarsi nel prolungamento del segmento «AB» per cui l'angolo «BAE» non può essere nullo, come, infatti, non lo è.

Si trova il punto medio «F», del segmento «AB», ed il punto medio «G», del segmento «AE».

Da questi due punti si tracciano le mediane relative ai segmenti e «AB» e AE che, non essendo parallele, si devono incontrare nel punto «H».

Si unisca ora il punto «H» sia col vertice «C» sia col vertice «E» sia col vertice «A» sia col vertice «D».

Consideriamo, ora, i due triangoli: «HDA», «HCE».

I due triangoli sono congruenti, per il ***terzo criterio di congruenza dei triangoli***, in quanto hanno: «AD = CE».

Hanno, inoltre, «HD = HC» in quanto lati del triangolo isoscele «DCH» e «HA = HE» in quanto lati del triangolo isoscele «AEH»; la mediana di «AB» è anche la mediana di «CD».

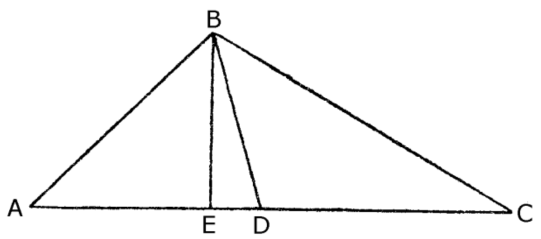
Nello specifico, saranno congruenti gli angoli «HDA» e «HCE», ma costatato che «HDC» e «HCD» sono congruenti, poiché angoli alla base del triangolo isoscele HDC, ne risulta che l'angolo «CDA» è congruente all'angolo «DCE».

Si è pertanto dimostrato che: ***un angolo retto è anche ottuso***.

Un paradosso un poco più complesso.

Una parte di un segmento è uguale al segmento intero

Prendiamo in considerazione un triangolo qualunque, ad esempio il triangolo «ABC».



Dal vertice «B», dell'angolo maggiore «ABC», conduciamo un segmento «BD» (che incontra il segmento «AC» in «D») in modo che risulti l'angolo «CBD» uguale all'angolo «BAC».

Abbassiamo inoltre, sempre dal vertice «B», la perpendicolare «BE» su «AC».

Dai due triangoli equiangoli e «ABC» e «BDC»:

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{BDC}} = \frac{(\mathrm{AB})^2}{(\mathrm{BD})^2}$$

Costatando che i triangoli e «ABC» e «BDC» hanno la stessa altezza «BE», possiamo scrivere:

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{BDC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DC}}$$

Dalle due relazioni, appena presentate, si deduce:

$$\frac{(\mathrm{AB})^2}{\mathrm{AC}} = \frac{(\mathrm{BD})^2}{\mathrm{DC}} \qquad [01]$$

Un noto teorema ci permette di scrivere:

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AC})^2 + (\mathrm{BC})^2 - 2 \bullet \mathrm{AC} \bullet \mathrm{EC}$$

$$(\mathrm{BD})^2 = (\mathrm{DC})^2 + (\mathrm{BC})^2 - 2 \bullet \mathrm{DC} \bullet \mathrm{EC}$$

Sostituendo questi valori nella [01], si ha:

$$\frac{(\mathrm{AC})^2 + (\mathrm{BC})^2 - 2 \bullet \mathrm{AC} \bullet \mathrm{EC}}{\mathrm{AC}} = \frac{(\mathrm{DC})^2 + (\mathrm{BC})^2 - 2 \bullet \mathrm{DC} \bullet \mathrm{EC}}{\mathrm{DC}}$$

Semplificando:

$$\mathrm{AC} + \frac{(\mathrm{BC})^2}{\mathrm{AC}} = \mathrm{DC} + \frac{(\mathrm{BC})^2}{\mathrm{DC}}$$

Semplificando ancora:

$$\frac{(BC)^2}{AC} - DC = \frac{(BC)^2}{DC} - AC$$

Ed infine:

$$[(BC)^2 - AC \bullet DC] \bullet DC = [(BC)^2 - AC \bullet DC] \bullet AC$$

Dividendo, ora, ambo i membri per il fattore posto in parentesi quadra, si ottiene:

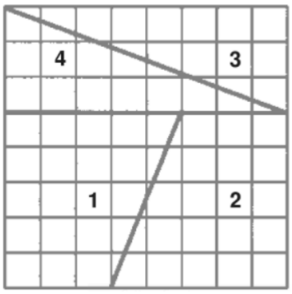
$$\mathbf{DC = AC}$$

Si è pertanto dimostrato che: ***una parte è uguale al tutto***.

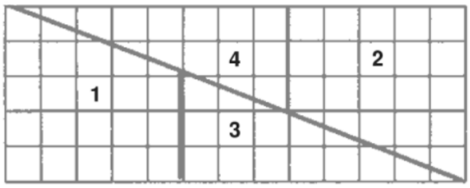
Adesso un paradosso per i più giovani, molto giovani, direi ancora piccini.

Il paradosso di Hooper

Tagliamo il quadrato di caselle «8 • 8 = 64» sia in due trapezi (figure e 1 e 2) sia in due triangoli (figure e 3 e 4).



Riordiniamo le quattro figure in modo da formare il rettangolo rappresentato adesso; le caselle del rettangolo sono diventate, ora, «5 • 13 = 65».

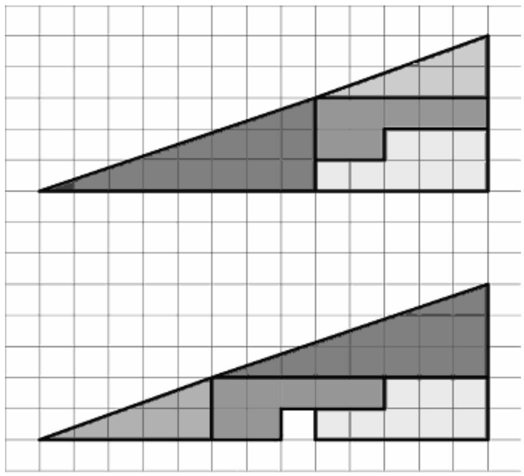


Da dove è scaturito fuori quel quadratino in più.

Non ve lo dico!

La parte mancante

Consideriamo un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente tredici (13) unità, la *base*, e cinque (5) unità, l'*altezza*.



Dividiamo il triangolo in alcune *forme*, qui evidenziate in diverse tonalità di grigio.

Ora, scomponiamo il triangolo di partenza e ricomponiamolo cambiando la posizione delle singole forme (verificate che e la forma e la superficie di ogni singola *forma* sia rimasta esattamente uguale).

Modificando la posizione delle *forme* che compongono il triangolo grande, sembrerebbe che, alla fine, rimanga una piccola area quadrata vuota!

L'area della figura superiore è:

$$S = \frac{13 \bullet 5}{2} = 32.5 \text{ unità}$$

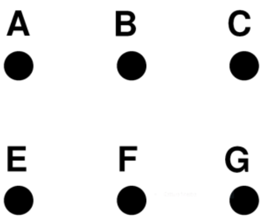
Come mai l'area della figura inferiore è di soltanto 31.5 unità, nonostante sia composta dalle medesime *forme*, aventi le medesime aree, con cui è composta la figura superiore?

Ma forse, anche in questa seconda sezione, ho commesso qualche errore, da qualche parte! Ma dove?

Bo! Cioè, credo, forse . . . non lo so!

Sempre a voi, l'ardua sentenza.

Un problema da far risolvere agli amici



Tre case «**A**», «**B**», «**C**», devono essere collegate, ciascuna, a tre centrali «**E**», «**F**», «**G**», rispettivamente: del gas, dell'acqua, dell'elettricità; per ragioni di sicurezza, però, bisogna evitare che i collegamenti si sovrapprongano.

Attenti, per contro, alla loro reazione quando scopriranno che il problema non ha soluzione.

Appendice «0s»

Inganni matematici

L'albergatore e i dieci avventori

La seguente canzoncina è stata tratta dauna rivista inglese della fine del XIX secolo.

Dieci stanchi viaggiatori,
piè piagati ed ossa rotte,
eran giunti a una locanda
che già cupa era la notte.
Nove stanze, non di più –
disse l'oste, - posso offrire.
Solo in otto il letto è singolo,
l'altra a due dovrà servire.
Qui successe un parapiglia,
una cosa da ammattire,
ché nessun di quei signori
in due insiem volea dormire.
L'oste indubbio, era un furbone,
alla svelta si sbrigò
e per far piacere agli ospiti
ecco cosa ti pensò.
Due di quelli mise i **A**
ed il terzo alloggiò i **B**;
assegnato il quarto in **C**,
ritirossi il quinto in **D**.
In **E** il sesto e il **F** poi
anche un altro sistemò;
in **G** ed **H** ottavo e nono.
Indi ad **A** se ne tornò,
dove aveva, come dissi,
due clienti a sistemare
e uno di essi, il dieci infine
in **I** fece traslocare.
Nove stanze a letto singolo
fece a dieci allor bastare
Ed è questo che me e molti
ancor fa meravigliare.

Appendice «0t»

Giochi matematici

Indovinare un numero pensato (1)

(trucco banale, ma qualche volta funziona)

Si chiede, ad una persona, di pensare un numero «x»
Gli si chiede inoltre di:
moltiplicarlo per due (2)
di aggiungere quattro (4)
di moltiplicare il tutto per tre (3)
di aggiungere ventiquattro (24)
di dividere il tutto per sei (6)
Gli si fa, infine, detrarre il numero pensato «x»
Il numero che rimane è, in questo caso, sempre sei (6)

Ad esempio

Seguiamo il procedimento:
Scegliamo un numero «x»:
Lo moltiplichiamo per due (2) e otteniamo «2 • x».
Gli aggiungiamo quattro (4) ed otteniamo «2 • x + 4».
Lo moltiplichiamo per tre (3) ed otteniamo «3 • (2 • x + 4)», ovvero «6 • x + 12».
Gli aggiungiamo ventiquattro (24) ed otteniamo «6 • x + 12 + 24», ovvero «6 • x + 36».
Lo si fa dividere per sei (6) ed otteniamo «(6 • x + 36) / 6», ovvero «x + 6».
Togliamo il numero pensato «x» ed otteniamo «x + 6 - x», ovvero «6»

Osservazioni

La serie di operazioni che si sono fate eseguire possono variare ed essere modificate a piacimento; è sufficiente eseguire le operazioni prima e costatare il risultato.

Nell'ultima operazione si è fatto detrarre il numero pensato per cui è irrilevante il numero scelto dal nostro interlocutore.

Conoscendo il risultato si può continuare, dopo aver fatto sottrarre il numero pensato, a far eseguire qualche altra operazione a caso prima di comunicare la soluzione.

Indovinare un numero pensato (2)

(meno banale)

Si fa pensare, ad una persona, un numero «a».
Lo si fa moltiplicare per tre (3), ottenendo «b».
Si chiede di sapere se «b» o è dispari o è pari.
Se «b» è pari lo si fa dividere per due (2); se «b» è dispari gli si fa aggiungere uno (1) e poi lo si fa dividere per due (2), ottenendo «c».
Lo si fa moltiplicare per tre (3), ottenendo «d».
Si fa sottrarre dal prodotto tante volte nove (9) quanto è possibile, senza ottenere un risultato negativo.
Si chiede quante volte «n» la sottrazione ha potuto essere eseguita.
Se il numero «b» è pari il risultato è: a = 2 • n.
Se il numero «b» è dispari il risultato è: a = 2 • n + 1.

Ad esempio

Numero pensato sia 6
6 x 3 = 18 (18 è pari)
18 / 2 = 9
9 x 3 = 27
27 - 9 = 18, 18 - 9 = 9, 9 - 9 = 0
La sottrazione è potuta avvenire tre volte: n = 3
a = 2 • 3 = 6

Ad esempio

Numero pensato sia 5
5 x 3 = 15 (15 è dispari)
(15 + 1) / 2 = 8
8 x 3 = 24
24 - 9 = 15, 15 - 9 = 6 (6 – 9 = -3, darebbe un numero negativo)
La sottrazione è potuta avvenire due volte: n = 2
a = 2 • 2 + 1 = 5

Trovare una cifra mancante (1)

Si fa pensare, ad una persona, un numero di cinque (5) cifre.
Si fa eseguire la differenza fra il numero scelto ed il numero ottenuto invertendo le cifre.
Si fa moltiplicare il risultato per un numero *qualunque*.
Si fa scrivere il nuovo risultato ponendo una «X» al posto di una cifra qualsiasi.

Ad esempio

La persona esegue, non vista da noi, le seguenti operazioni:
sceglie un numero 31 572
ricava il numero invertito 27 513
esegue la differenza 31 572 - 27 513 = 4 059
moltiplica, ad esempio, per 287 4 059 • 287 = 1 164 933
presenta il numero 1 1x4 933
Noi eseguiamo, anche mentalmente, le seguenti operazioni:
scomponiamo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra: 1 1x 49 33
sommiamo i gruppi di due cifre che non contengono la «x»: **33** + **49** + (1x) + **1** = 83
eseguiamo la differenza: 99 – 83 = 16 (99 è un numero fisso).
La cifra cancellata occupa, nel gruppo di due cifre contenente la «x», il posto dell'unità;
la cifra cancellata è dunque quella che nel risultato «16» occupa il posto delle unità, quindi si avrà: x = 6.

Trovare due cifre mancanti

Il procedimento è identico fino a presentare il risultato in cui si sono sostituite due cifre, non ambedue nulle e che occupino una un posto pari ed una un posto dispari, con altrettante «x».

Ad esempio

La persona esegue, non vista da noi, le seguenti operazioni:
sceglie un numero 78 513
ricava il numero invertito 31 587
esegue la differenza 78 513 - 31 587 = 46 926
moltiplica, ad esempio, per 31 46 926 • 31 = 1 454 706
presenta il numero 1 4x4 7x6
Noi eseguiamo, anche mentalmente, le seguenti operazioni:
scomponiamo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra: 1 4x 47 x6
sommiamo **tutti** i gruppi di due cifre: x6 + **47** + 4x + **1** = 94
eseguiamo la differenza: 99 – 94 = 05 (99 è un numero fisso).
Le cifre cancellate sono lo «0» ed il «5».
Il «5» appartiene alle unità per cui sostituirà la «x» in 4x, che diviene: 45
Lo «0» appartiene alle decine, per cui sostituirà la «x» in x6, che diviene: 06

Indovinare il risultato di una serie di operazioni

Si fa scrivere, ad un amico, un qualsiasi numero di tre cifre su un foglio di carta (l'importante è che sia a cifre decrescenti es: 432 o 875) ottenendo il numero «a».
Gli si chiede poi di eseguire le seguenti operazioni:
di invertite il numero «a», che ha scritto precedentemente, ottenendo il numero «b».
sottraete il numero «b» dal numero «a», ottenendo il numero «c».
Invertite il numero «c», ottenendo il numero «d».
addizionare i numeri e «c» e «d», ottenendo il numero «e».
Vediamo ora di fare qualche esempio pratico.

Ad esempio

Ipotizziamo che la persona davanti a noi scriva il numero «a = **752**».
Invertendo il numero «a» otterrà «b = **257**».
Sottraendo il numero «b» dal numero «a» otterrà «c = **752 - 257 = 495**».
Invertendo il numero «c» otterrà «d = **594**».
Addizionando «c» con «d» otterrà il numero «e = **495 + 594 = 1 089**».

Ora il numero scritto è «a = **983**».
Invertendo il numero «a» otterrà «b = **389**».
Sottraendo il numero «b» dal numero «a» otterrà « **c = 983 - 389 = 594**».
Invertendo il numero «c» otterrà «d = **495**».
Addizionando «c» con «d» otterrà il numero «e = **594 + 495 = 1 089**».
Come potete vedere da due esempi, il risultato sarà sempre **1089**!

Ora il numero in questione è «a = **210**».
Invertendo il numero scritto al punto avremo «b = 0**12**».
Sottraendo il numero «b» dal numero «a» otterremo «c = **210 – 012 = 198**».
Invertendo il numero «c» otteniamo «d = **891**».
Addizionando ora i numeri e «c» e «d» otteniamo «**e = 198+891 = 1 089**».
Il trucco del numero «**1 089**» funziona con qualsiasi numero a 3 cifre, ma le cifre devono essere necessariamente decrescenti! Quindi, non importa quale numero la persona scelga, egli svolgerà i calcoli senza sospettare niente! Quando voi gli direte che la risposta è 1 089, rimarrà sicuramente scioccato!
Pronti, pertanto, a stupire i vostri amici.

Indovinare l'età di una persona

Si presenta la seguente tabella ad una persona, che non abbia più di sessantatre (63) anni, e gli si richiede di indicare in quali colonne è presente la sua età.

Parimenti si può presentare la seguente tabella ad una persona, proporgli di pensare ad un numero compreso fra uno «1» e sessantatre «63» e richiedergli di indicare in quali colonne è presente il numero da lui pensato.

1°	2°	3°	4°	5°	6°
3	14	12	11	25	38
17	2	13	12	26	39
27	10	14	24	48	40
53	6	15	40	55	53
59	11	21	56	60	61
51	18	44	63	63	62
47	3	45	62	62	63
49	15	46	46	61	55
37	34	47	47	56	54
1	7	52	58	27	60
19	35	20	57	28	59
21	38	28	45	20	58
23	42	36	61	19	56
25	50	55	60	18	57
15	58	60	59	17	52
5	23	61	25	16	51
33	59	37	26	29	37
35	51	38	13	30	36
13	39	39	15	31	35
7	19	62	30	21	32
29	22	63	41	51	33
31	30	31	31	50	34
9	31	7	14	22	44
45	43	6	8	49	45
11	46	22	28	52	46
39	54	23	29	57	47
41	63	34	42	58	48
43	62	30	43	59	49
55	27	53	27	54	50
61	47	29	44	24	43
63	55	4	10	53	42
57	26	5	9	23	41

Si potrà conoscere il numero *segreto* scrivendo in sequenza un uno «1», per ciascuna colonna in cui il numero cercato è presente, e zero per le altre; in questo modo si otterrà il numero cercato, scritto nel sistema di numerazione binario, se letto da destra verso sinistra.

Ad esempio

Si è pensato il numero trentacinque (35) che è presente nelle colonne: 1°, 2°, 6°.
Operando come descritto si ottiene la sequenza: 110001.
Questa sequenza di cifre, lette da destra verso sinistra fornisce il numero scritto in numerazione binaria: 100011 che equivale, in numerazione decimale, al numero 35.

Si è pensato il numero cinquantadue (52) che è presente nelle colonne: 3°, 5°, 6°.
Operando come descritto si ottiene la sequenza: 001011.
Questa sequenza di cifre, lette da destra verso sinistra fornisce il numero scritto in numerazione binaria: 110100 che equivale, in numerazione decimale, al numero 52.
Possiamo, per contro, semplificare il calcolo considerando le varie colonne come potenze di due (2), secondo la seguente logica:

1° = 20 = 1 2° = 21 = 2 3° = 22 = 4
4° = 23 = 8 5° = 24 = 16 6° = 25 = 32

Per individuare il numero *segreto* sarà sufficiente sommare le potenze di due, come da schema, delle colonne che contengono il numero in esame.

Ad esempio

Si è pensato il numero trentacinque (35) che è presente nelle colonne: 1°, 2°, 6°.
La potenza di due (20) nella colonna 1° è 1
La potenza di due (21) nella colonna 2° è 2
La potenza di due (25) nella colonna 6° è 32
Per cui il numero cercato è la somma: 1 + 2 + 32 = 35

Si è pensato il numero trentacinque (52) che è presente nelle colonne: 3°, 5°, 6°.
La potenza di due (22) nella colonna 3° è 4
La potenza di due (24) nella colonna 5° è 16
La potenza di due (25) nella colonna 6° è 32
Per cui il numero cercato è la somma: 4 + 16 + 32 = 52

Indovinare un numero dall'«1» al «99»

a) Si compilano sette schede e «**A**» e «**B**» e «**C**» e «**D**» e «**E**» e «**F**» e «**G**», inserendo nelle caselle di ciascuna i numeri come indicato negli schemi e [sc. 01] e [sc. 02] e [sc. 03] e [sc. 04] e [sc. 05] e [sc. 06] e [sc. 07].

A

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

[sc. 01].

B

2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95	98	99

[sc. 02]

C

4	5	6	7	12	13	14	15	20	21
22	23	28	29	30	31	36	37	38	39
44	45	46	47	52	53	54	55	60	61
62	63	68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95		

[sc. 03]

D

8	9	10	11	12	13	14	15	24	25
26	27	28	29	30	31	40	41	42	43
44	45	46	47	56	57	58	59	60	61
62	63	72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95		

[sc. 04]

E

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95		

[sc. 05]

F

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	96	97	98	99				

[sc. 06]

G

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
94	95	96	97	98	99				

[sc. 07]

b) Si dispongono sul tavolo le sette schede e si invita uno spettatore a pensare un numero compreso tra «1 ÷ 99».

c) Gli si chiede di indicare le schede che contengono il numero da lui scelto.

d) Dando una rapida occhiata alle schede che ha indicato si può, in tutta sicurezza, indovinare il numero a cui ha pensato!

Per individuare il numero scelto dallo spettatore, si deve semplicemente fare la somma dei valori che compaiono nelle caselle al primo posto (in alto a sinistra) su ciascuna delle schede indicate.

Ad esempio

Assumiamo che lo spettatore abbia comunicato che il numero da lui prescelto compare nelle schede: «**B**» (dove nella prima casella vi è il «2»), «**D**» (dove nella prima casella vi è l'«8»), «**G**» (dove nella prima casella vi è il «64»); in questo caso il numero da lui pensato sarebbe: «2 + 8 + 64 = 74».

Spiegazione

Ciascuna delle sette schede è stata associata a una particolare potenza di «2», vedi schema [sc. 08], poco più avanti.

Su ciascuna scheda sono stati inseriti solo quei numeri (compresi fra «1 ÷ 99») la cui codifica in binario contiene una cifra «1» nella colonna relativa alla potenza di «2» ad esso associata.

Nella scheda «**A**», infatti, sono presenti: 1, 3, 5, ... 99, tutti numeri la cui codifica in binario contiene un «1» nell'ultima colonna (quella associata a 2^0): 1, 11, 101,..., 1100011.

Nella scheda «**B**» sono presenti: 2, 3, 6, ... 99, tutti numeri la cui codifica in binario contiene un «1» nella penultima colonna (quella associata a 2^1): 10, 11, 110..., 1100011, e cosi via.

Scheda	Potenza
A	$2^0 = 1$
B	21 = 2
C	22 = 4
D	23 = 8
E	24 = 16
F	25 = 32
G	26 = 64

[sc. 08]

In questo modo, conoscendo quali schede contengono un determinato numero, si viene a sapere anche quali colonne della sua codifica binaria contengono la cifra «1» (e quali, per esclusione, la cifra «0»).

Per risalire al valore del numero da indovinare, però, non c'è bisogno di effettuare esplicitamente l'operazione di decodifica dal binario, Infatti, dato che, per rendere più rapida la loro consultazione, i numeri sono stati disposti in ordine crescente per colonne, ogni scheda riporta al primo posto, in alto a sinistra, proprio il valore della potenza di «2» ad esso associato; di conseguenza, la decodifica dal binario si compie automaticamente, sommando i numeri che compaiono in testa alle schede interessate.

Ultimo esempio

Il numero scelto dallo spettatore compare nelle schede e «**B**» e «**D**» e «**G**», la sua codifica in binario deve contenere la cifra «1» nelle posizioni: 2^a, 4^a, 7^a (iniziando a contare da destra) e di conseguenza, corrisponde a: 1001010; quindi, il suo valore decimale è uguale a: $2^1 + 2^3 + 2^6 = 2 + 8 + 64 = 74$; come si può costatare, questo stesso valore si ottiene sommando i numeri che compaiono nella casella in alto a sinistra in ogni scheda interessata e «**B**» e «**D**» e «**G**».

Trovare una cifra mancante (2)

Si fa comporre, ad una persona, un numero di cinque (5) cifre nel quale.

Si fa comporre un alto numero utilizzando le stesse cifre in una sequenza diversa.

Si fa sottrarre il numero minore dal numero maggiore.

Gli si chiede di comunicare quattro delle cifre del risultato, ma la quinta cifra, quella non comunicata e tenuta nascosta, non deve essere uno *zero*.

Ad esempio

La persona scrive il primo numero: «36435».

Utilizzando le stesse cifre, scrive il secondo numero: «53643».

Sottrae il numero minore dal numero maggiore: «53643 – 36435 = 17208».

Comunica quatto delle cinque cifre, tenendo nascosta la quinta cifra (non può tenere nascosto lo *zero*): «7, 1, 0, 2».

Soluzione

Noi dobbiamo semplicemente sommare le cifre che ci sono state comunicate.

Nell'esempio: 7 + 1 + 0 + 2 = 10 (è stato tenuto nascosto l'«8»)

Sottraiamo, infine, questo valore dal successivo multiplo di *nove*, maggiore di «10», che è «18»; ovvero: 18 – 10 = 8.

La cifra «8» è quella che ci è stata tenuta nascosta.

La spiegazione del trucco

La differenza fra due numeri che contengono le stesse cifre è sempre un multiplo i nove; la successione in cui sono disposte non ha alcuna influenza.

Ad esempio

72 486 542 – 62 542 847 = 9 943 695

$^{9\,943\,695}/_{9}$ = 1 104 855 (il numero «9 943 695» è un multiplo di nove).

Parimenti, è un multiplo di nove la somma delle cifre che compongono tale differenza; le cinque cifre che compongono quest'ultima, pertanto, sommate insieme, danno come risultato un multiplo di nove.

Proseguendo nell'esempio

9 + 9 + 4 + 3 + 6 + 9 + 5 = 45

$^{45}/_{9}$ = 5 (il numero «45» è un multiplo di nove).

Osservazioni

In quest'ultimo esempio si sono utilizzati due numeri di *otto* cifre.

L’affermazione che la differenza fra due numeri che contengono le stesse cifre è sempre un multiplo i nove, vale, infatti, per numeri composti da un qualsiasi numero di cifre.

Far comporre numeri composti da *cinque* cifre, mi sembra la scelta migliore.

Disquisendo sulle probabilità

Il matematico statunitense **Charles Sanders Peirce** (1839 - 1914) dichiarò che in nessuna altra branca della matematica è tanto facile, anche per gli esperti, prendere degli abbagli come nella *teoria delle probabilità*.

Questo che andiamo a presentare non è propriamente un gioco matematico, ma può essere ugualmente presentato come tale.

Prendiamo in esame tre preposizioni:

il sig. Smith ha due figli.

il sig. Smith ha due figli, uno di loro è un maschio.

il sig. Smith ha due figli, il maggiore di loro è un maschio.

(col termine di ***figli*** si intendono sia i maschi sia le femmine)

Qual è la probabilità che ambedue i figli siano ambedue maschi? É uguale per tutte e tre le preposizioni o è diversa per ciascuna di loro?

Nella prima affermazione le possibilità sono quattro: [maggiore maschio - minore maschio], [maggiore maschio - minore femmina], [maggiore femmina - minore maschio], [maggiore femmina - minore femmina]; pertanto la possibilità che ambedue siano maschi è $^1/_4$ (un quarto).

Nella seconda affermazione le possibilità sono tre: [maggiore maschio - minore maschio], [maggiore maschio - minore femmina], [maggiore femmina - minore maschio], pertanto la possibilità che ambedue siano maschi è $^1/_3$ (un terzo); la possibilità [maggiore femmina – minore femmina] non deve essere considerata.

Nella terza affermazioni le possibilità sono due: [maggiore maschio - minore maschio], [maggiore maschio - minore femmina], pertanto la possibilità che ambedue siano maschi sale a $^1/_2$ (un mezzo); le possibilità [maggiore femmina - minore maschio], [maggiore femmina - minore femmina] non devono essere considerate.

Ancora sulle probabilità

La regola della “o”

La probabilità che si verifichi un evento «A» “o” un altro «B», se i due eventi non possono accadere insieme, è la somma delle probabilità di ciascuno dei due.

Ad esempio

In un mazzo da poker di 52 carte (gli jolly non si considerano) la probabilità che, prendendo una carta a caso, questa sia od un asso o una figura è:

Probabilità che sia un asso: $P(A) = {}^4/_{52}$ $({}^{\text{casi favorevoli}}/_{\text{casi possibili}})$

Probabilità che sia una figura: $P(B) = {}^{12}/_{52}$

Probabilità che sia od un asso o una figura: $P(\text{o A o B}) = P(A) + P(B) = {}^4/_{52} + {}^{12}/_{52} = {}^{16}/_{52} = 0{,}307\ldots$

La regola della “e”

La probabilità che si verifichi Un evento «A» “e” un altro «B», se i due eventi sono indipendenti, nel senso che il fatto che ne capiti uno non tocchi la probabilità che capiti anche l’altro, è uguale al prodotto delle loro probabilità.

Ad esempio

Lanciando un dado due volte, la probabilità che esca prima un «3» e poi un «4» è:

Probabilità che esca un «3»: $P(A) = {}^1/_6$ $({}^{\text{casi favorevoli}}/_{\text{casi possibili}})$

Probabilità che esca un «4»: $P(B) = {}^1/_6$

Probabilità che esca prima un «3» e poi un «4»: $P(\text{o A e B}) = P(A) + P(B) = {}^1/_6 \bullet {}^1/_6 = {}^1/_{36} = 0{,}027\ldots$

Un problema di Leonardo da Vinci

Pensa ad un numero qualsiasi, moltiplicalo per due «2» e aggiungi cinque «5».

Ora moltiplicalo per cinque «5», aggiungi dieci «10» e moltiplica per dieci «10».

Dimmi il risultato.

Se dal risultato si sottrae «350» e si divide per «100» si ottiene il numero pensato.

Esempio

Hai pensato il numero otto (8).

Lo moltiplichi per «2» e aggiungi «5»: 8 • 2 + 5 = 21.

Lo moltiplichi per «5», aggiungi «10», lo moltiplichi per «10»: (21 • 5 + 10) • 10 = 1 150

Il risultato è appunto 1 150

Vi sottraiamo «350» e dividiamo per «100»: (1 150 – 350) / 100 = 8

Il problema dei compleanni

In un gruppo di «N» persone, qual è la probabilità che 2 di loro siano nate lo stesso giorno?

Il e fisico e cosmologo e divulgatore russo **George Gamow** (1904 – 1968), in russo: Георгий Антонович Гамов, fornisce un semplice procedimento per ottenere il risultato:

Per risolvere questo problema, iniziamo col calcolare qual è la probabilità che 2 siano nate in giorni diversi.

La prima non ha alcuna restrizione, può essere nata in un qualsiasi giorno dell'anno («365» casi favorevoli su «365» casi possibili); la seconda, può essere nata in un qualsiasi giorno dell'anno meno che in quello in cui è nata la prima («364» casi favorevoli su «365» casi possibili), per cui la probabilità che i compleanni di due persone qualsiasi ***non*** cadano nello stesso giorno è «$^{364}/_{365}$» (costatato che vi è solo una possibilità su 365 che il compleanno di una persona coincida con quello di un'altra).

$$\frac{365}{365} \bullet \frac{364}{365} = 0{,}997\,260\ldots$$

La probabilità che il compleanno di una terza persona differisca da quello delle altre due è di «$^{363}/_{365}$»; per una quarta persona. la probabilità è «$^{362}/_{365}$».

$$\frac{365}{365} \bullet \frac{364}{365} \bullet \frac{363}{365} = 0{,}991\,795\ldots$$

la probabilità è «$^{362}/_{365}$».

La probabilità che «30» persone siano nate in giorni diversi è quindi:

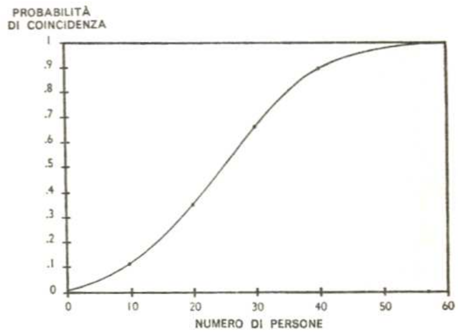
$$\frac{365}{365} \bullet \frac{364}{365} \bullet \frac{363}{365} \bullet \ldots \bullet \frac{336}{365} = 0{,}293\,7\ldots$$

Vi sono solo due possibilità: sono tutte nate in giorni diversi, almeno due sono nate lo stesso giorno.

Pertanto, la probabilità che almeno 2 siano nate lo stesso giorno è:

$$1 - \frac{365}{365} \bullet \frac{364}{365} \bullet \frac{363}{365} \bullet \ldots \bullet \frac{336}{365} = 0{,}706\,3\ldots$$

Dunque, la probabilità che in un gruppo di 30 persone o 2 o più siano nate lo stesso giorno è dell'ordine del 70%; con 23 persone è dell'ordine del 50% e con 40 persone è dell'ordine del'89%.



La figura a destra mostra, graficamente, come la curva delle probabilità salga all'aumentare del numero delle persone.

Il diagramma è limitato a «60» persone poiché, oltre questo numero, la probabilità è troppo vicino alla certezza per poter distinguere la curva da una retta.

Per «100» persone, la probabilità di una coincidenza di due compleanni sono circa «3 300 000» ad uno; la certezza assoluta si avrebbe solo con «366» persone.

Un sorteggio controverso

Un professore di matematica propose ai suoi «30» allievi un gioco: *lui avrebbe scritto su un foglio un numero dall'uno al trenta, poi ciascun allievo, seguendo l'ordine in cui erano seduti, avrebbe scelto un numero, fra quelli non ancora nominati, fino a che uno avesse indovinato quello scelto dal professore*.

Un allievo, fra quelli che avrebbero dovuto scegliere per ultimi, obiettò che egli avrebbe avuto poche possibilità di indovinare, sicuramente meno dei primi, e che, addirittura, avrebbe potuto non avere neanche la possibilità di esprimere la sua scelta perché un altro, prima di lui, lo avrebbe potuto indovinare.

Un altro, fra quelli che avrebbero dovuto scegliere per primi obiettò che era lui il penalizzato, poiché: *il primo avrebbe la probabilità di «$^{1}/_{30}$» di indovinare perché avrebbe «30» numeri fra i quali scegliere, il secondo avrebbe la probabilità di «$^{1}/_{29}$», quindi una probabilità maggiore di indovinare, perché avrebbe «29» numeri fra i quali scegliere, il terzo avrebbe la probabilità di «$^{1}/_{28}$», quindi una probabilità ancora maggiore di indovinare, perché avrebbe «28» numeri fra i quali scegliere, e cosi di seguito fino ad arrivare all'ultimo che avrebbe la probabilità di «$^{1}/_{1}$», ovvero la certezza.*

In verità, tutti gli allievi hanno la stessa probabilità di indovinare; è evidente che il primo ha la probabilità di «$^{1}/_{30}$» perché ha «30» numeri fra cui scegliere.

La probabilità di indovinare per il secondo sarà «$^{29}/_{30} \bullet {}^{1}/_{29} = {}^{1}/_{30}$», ossia probabilità che il primo non indovini «$^{29}/_{30}$» per la probabilità che lui indovini «$^{1}/_{29}$»; per il terzo, la probabilità di indovinare, sarà «$^{29}/_{30} \bullet {}^{28}/_{29} \bullet {}^{1}/_{28} = {}^{1}/_{30}$», ossia probabilità che né il primo né il secondo indovinino «$^{29}/_{30} \bullet {}^{28}/_{29}$» per la probabilità che lui indovini «$^{1}/_{28}$», e cosi di seguito fino all'ultimo.

Osserviamo, che essendo la probabilità del primo, di indovinare il numero, «$^{1}/_{30}$», se detta probabilità diminuisse per gli altri, la somma delle probabilità non potrebbe essere uguale ad «1».

Appendice «0u»

Ancora sui fattoriali

Valutazione numerica dei fattoriali

Quando «n» è molto grande, generalmente non serve conoscere il valore esatto di n!, ma può essere sufficiente stimarlo con una certa accuratezza; a tal uopo, in genere, si usa la ***formula approssimata di Stirling***, che deve il suo nome al matematico scozzese **James Stirling** (1692 - 1770).

$$n! \approx \sqrt{2 \bullet \pi \bullet n} \bullet \left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2 \bullet \pi \bullet n} \bullet n^n \bullet e^{-1}$$

In cui: e = base dei logaritmi naturali.

Il semifattoriale o doppio fattoriale

Il ***semifattoriale*** di «n», indicato con «n!!»,è il numero che si ottiene facendo il prodotto dei primi «$^n/_2$» pari della sequenza dei numeri interi, se «n» è pari, e dei primi «$^{(n+1)}/_2$» dispari, se invece «n» è dispari; più semplicemente è il numero che si ottiene facendo il prodotto di tutti i numeri interi pari da «2» ad «n» compreso, se «n» è pari, o facendo il prodotto di tutti i numeri dispari da «1» ad «n» compreso, se «n» è dispari.

Esempio

8!! = 2 • 4 • 6 • 8 = 384 9!! = 1 • 3 • 5 • 7 • 9 = 945

Il semifattoriale è legato al fattoriale dalle seguenti identità:

n! = n!! • (n - 1)!!

2n • n! = (2 • n)!! (per i semifattoriali pari)

(2 • n + 1)! / (2n • n!) = (2 • n + 1)!! (per i semifattoriali dispari)

Appendice «0v»

Curiosità matematiche

Sul numero più grande

Si è detto, pagina 21 **Appendice «0a»**, che il numero più grande che può essere scritto con tre cifre è: «$9^{9^{9}}$».

In verità, per contro, ricorrendo ad una *sottigliezza linguistica*, il numero più grande che può essere scritto con tre cifre potrebbe essere «$9^{9^{9}}!$», infatti il segno di fattoriale «!» non è una cifra; e se mi facessi prendere dall'entusiasmo e scrivessi «$9!^{9!^{9!}}!$».

Un'intuizione geniale

Come sappiamo, o come dovremmo sapere, nel piano possiamo disegnare qualunque poligono regolare con almeno tre «3» lati.

Nello spazio troviamo i 5 solidi che conosciamo: tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro (vedi: **I poliedri regolari**, a pagina 68).

Per quanto riguarda gli spazi a più di tre dimensioni si ha: nello spazio a quattro dimensioni vi sono «6» figure regolari, nello spazio a cinque dimensioni vi sono «3» figure regolari, e poi, negli spazi a più di cinque dimensioni, sempre «3» figure regolari.

Sino ad ora nessuno ha mai trovato una formula che leghi il numero di figure alla dimensione degli spazi, ma il matematico italiano **Giorgio Dendi** (1958 - ?) ha avuto un'idea.

Nel piano (due dimensioni) ci sono **TUTTE** le figure regolari che vogliamo, da tre lati in avanti; ebbene, la parola "TUTTE" ha «5» lettere, e nello spazio successivo (tre dimensioni) ci sono proprio **CINQUE** figure regolari, e CINQUE ha «6» lettere e nello spazio successivo (quattro dimensioni) ci sono proprio **SEI** figure regolari, e SEI ha «3» lettere e nello spazio successivo (cinque dimensioni) ci sono proprio **TRE** figure regolari, e TRE ha «3» lettere.

Si entra, pertanto, in un circolo continuo infinito (loop, per chi ama i termini inglesi), perché TRE ha sempre «3» lettere, e sempre, negli spazi di dimensioni superiori a cinque, ci sono tre figure regolari!

Contare sulle dita di una mano

Un gioco banale, che qualche volta viene proposto ai bambini più piccoli, mira a dimostrare che «5 + 5 = 9»; basta, infatti, contare due volte le dita della mano in questa successione: pollice (1), indice (2), medio (3), anulare (4), mignolo (5), anulare (6), medio (7), indice (8) e pollice (9).

Il trucco è banale, ma questo metodo di contare può dar luogo ad una domanda curiosa; contando sulle dita di una mano in questo modo, e proseguendo con: indice (10), medio (11), anulare (12), . . . , su che dito mi fermerò quando arriverò contando fino all'anno in cui siamo? (consideriamo che siamo nel 2017).

Questa conta è una congruenza modulo 8; vale a dire che due numeri con lo stesso resto nella divisione per 8 si trovano sullo stesso dito.

Considerando il resto «r» ci si fermerà: «r = 0» sull'indice: «r = 1» sul pollice, «r = 2» sull'indice di nuovo, «r = 3» sul medio, «r = 4» sull'anulare, «r = 5» sul mignolo, «r = 6» di nuovo sull'anulare e «r = 7» di nuovo sul medio.

avremo:

$\frac{2\,017}{8} = 252{,}125$ $\quad 252 \bullet 8 = 2\,016$ $\quad r = 2017 - 2016 = 1$

Pertanto, siccome «2017» ha resto «1», nella divisione per 8, ci fermeremo sul pollice.

Sul triangolo di Tartaglia

Si trova anche sui libri di scuola media superiore che la somma dei numeri della riga ennesima «n» del triangolo di Tartaglia (o di Pascal, come viene detto altrove) è «2^{n-1}» (considerando: n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, ...).

n = 1	1	2^{1-1} = 20 = 1
n = 2	1 1	2^{2-1} = 21 = 2
n = 3	1 2 1	2^{3-1} = 22 = 4
n = 4	1 3 3 1	2^{4-1} = 23 = 8
n = 5	1 4 6 4 1	2^{5-1} = 24 = 16
n = 6	1 5 10 10 5 1	2^{6-1} = 25 = 32

Appendice «0z»

Un poco di rilassamento

La matematica nella poesia

Proseguiamo con un poco di svago, presentando due poesie d'argomento matematico, o quasi:

LA STATISTICA

di Carlo Alberto Salustri [Trilussa] (1871 – 1950)

Sai ched'è la statistica? È na' cosa
che serve pe fà un conto in generale
de la gente che nasce, che sta male,
che more, che va in carcere e che spósa.

Ma pè me la statistica curiosa
è dove c'entra la percentuale,
pè via che, lì, la media è sempre eguale
puro co' la persona bisognosa.

Me spiego: da li conti che se fanno
seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:

e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perch'è c'è un antro che ne magna due.

NUMMERI

di Carlo Alberto Salustri [Trilussa] (1871 – 1950)

\- Conterò poco, è vero:
\- diceva l'Uno ar Zero -
ma tu che vali? Gnente: propio gnente.
Sia ne l'azzione come ner pensiero
rimani un coso voto e inconcrudente.
Io, invece, se me metto a capofila
de cinque zeri tale e quale a te,
lo sai quanto divento? Centomila.
È questione de nummeri. A un dipresso
è quello che succede ar dittatore
che cresce de potenza e de valore
più so' li zeri che je vanno appresso.

La matematica nelle amenità

Per concludere, un poco di ironia con due barzellette simpatiche . . . forse:

Gesù si rivolge ai suoi discepoli, alza le braccia al cielo e dice: In verità, in verità vi dico: $y = x^2 - 4x + 7$.

I discepoli interdetti commentano un po' fra di loro, poi **Pietro** timidamente si avvicina mestamente a Gesù dicendogli: *Maestro perdonaci, ma . . . noi siamo dei pescatori, persone umili, ignoranti, e non comprendiamo la tua metafora*...".

Gesù si rivolge calmo verso il suo interlocutore e con un sorriso lo riprende serafico: *ma Pietro, la mia non è una metafora, è una parabola!*

Ad una grande festa sono invitate tutte le funzioni: dal *seno* al *coseno*, dal *logaritmo* alla *potenza*.

Ad un certo punto la funzione «ln(x)» si accorge che l'esponenziale «e^x» è isolata in un angolo, per cui decide di andare a parlarle e gli chiede preoccupata - "Cosa c'è che non va?".

L'esponenziale «e^x» risponde tristemente - "Non mi diverto e poi non conosco nessuno", al che la funzione «ln(x)» controbatte - "Su, vieni a ballare, unisciti a noi, dai integrati".

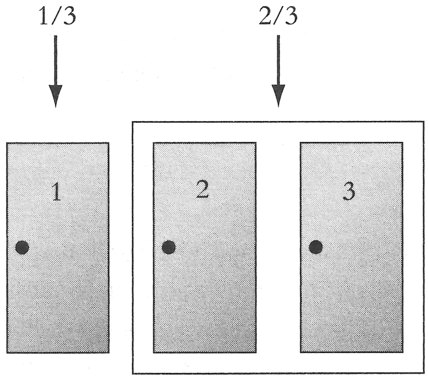
L'esponenziale «e^x» lapidaria sentenzia - "No no, è la stessa cosa!!".

Appendice «1a»

Il paradosso di Monty Hall

Premessa

Questo dilemma si presentò, per la prima volta 1963, durante il programma americano, presentato da **Monty Hall**, ***Let's make a deal***.



Ad un giocatore venivano mostrate 3 porte uguali chiuse, comunicandogli che solo dietro ad una d'esse vi era un premio.

Il giocatore doveva scegliere una delle porte senza però aprirla; il presentatore apriva, quindi una delle porte fra quelle non scelte che sapeva non contenere il premio.

A questo punto chiedeva al giocatore se desiderava mantenere la scelta già effettuata, aprendo quella la porta, o desiderava cambiare decisione scegliendo di aprire l'ultima porta rimasta.

Qual'è la migliore strategia che può seguire il giocatore: continuare a mantenere la prima scelta effettuata o cambiarla?

Il nostro intuito, molto probabilmente, ci direbbe che la probabilità e di vincere e di perdere (aprire per ultima o la porta dietro la quale vi è il premio o la porta dietro la quale non vi è il premio) sono identiche dato che dopo l'apertura di una delle porte senza premio eseguita dal presentatore, ne restano sempre altre due chiuse e, pertanto, il premio si può trovare, in modo equiprobabile dietro a ciascuna delle due.

Tuttavia, dato che la porta che viene aperta dal presentatore non contiene mai il premio, il precedente ragionamento non è corretto

Analizziamo il problema

Si osservi che il giocatore può scegliere, come prima scelta, la porta dietro la quale vi è il premio (porta giusta) in tre 3 modi diversi, mentre vi sono sei 6 modi diversi coi quali può scegliere la porta dietro la quale non vi è il premio (porta sbagliata).

Parimenti, per la regola di **Laplace**, il giocatore ha la probabilità di «$^1/_3$» di scegliere per prima la porta giusta; ha la probabilità di «$^2/_3$» di scegliere per prima la porta sbagliata.

La ***regola di Laplace***, dal nome del e matematico ed astronomo francese **Pierre-Simon Laplace** (1749 – 1827), afferma: «*La probabilità di un certo evento si calcola dividendo il numero di casi favorevoli all'evento per il numero di casi possibili risultanti dall'evento*».

Diciamolo in altro modo

Se il giocatore sceglie la porta sbagliata, dopo che il presentatore ha aperto la porta in cui sicuramente non vi è il premio, cambiando vincerebbe sicuramente.

Dietro la porta scelta dal giocatore non vi è il premio (porta sbagliata), dietro la porta aperta dal presentatore non vi è il premio (il presentatore lo sapeva); il premio può essere soltanto dietro la terza porta.

Se il giocatore sceglie la porta giusta, dopo che il presentatore ha aperto la porta in cui sicuramente non vi è il premio, cambiando perderebbe sicuramente.

Dietro la porta scelta dal giocatore vi è il premio (porta giusta), dietro la porta aperta dal presentatore non vi è il premio (il presentatore lo sapeva); il premio non può essere dietro la terza porta.

Costatato, però, che vi sono due porte sbagliate (due porte dove dietro non vi è il premio) e solo una porta giusta (una porta dove dietro vi è il premio) la probabilità di indovinare (di scegliere per ultima, cambiando, la porta dietro la quale vi è il premio) è doppia rispetto alla probabilità di non indovinare (di scegliere per ultima, cambiando, la porta dietro la quale non vi è il premio).

Appendice «1b»

Paradossi logici

Premessa

Il termine ***paradosso*** deriva dal greco ***παράδόξα***, composto di **παρα** nel significato di «contro» e **δόξα** nel significato di «opinione».

È un'affermazione, un'opinione che, per o il suo singolare contenuto o per il modo in cui viene espressa, è o appare contraria al giudizio comune, ed è pertanto ritenuta o strana o non vera.

Gli errori

a) In questo elenco ci sono due errori.
b) Roma è la capitale dell'Italia.
c) Due per due è uguale a cinque.
d) Il gatto è un mammifero.

se la «a» è vera allora c'è un solo errore e quindi la «a» è falsa; se la «a» è falsa allora ci sono due errori e quindi la «a» è vera.

Per «**Gli errori**» si è data la spiegazione del ***paradosso***, ma per i prossimi paradossi, per contro, ci dovrà pensare il lettore.

Il paradosso di Russell

Il ***paradosso di Russell*** è una delle *antinomie* e più conosciute e più interessanti nella storia della logica.

Formulato dal e filosofo e logico britannico **Bertrand Russell** (1872 - 1970), fra il 1901 e il 1902, può essere enunciato così: *L' insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso*.

Possiamo semplificare l'antinomia definendo «R» come l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi.

Ricordiamo che:
Gli insiemi ***normali*** sono quelli che non contengono se stessi.
Gli insiemi ***non normali*** (o anormali) sono quelli che contengono se stessi.

Il paradosso del mentitore

Il cretese **Epimenide** diceva: *tutti i cretesi sono mentitori*.

Il paradosso del barbiere

In un lontano villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e solo gli uomini del villaggio che non si radono da soli; il barbiere rade se stesso?

Il paradosso del bugiardo

Questa proposizione è falsa.

Un'altra versione del paradosso del bugiardo

a) questa proposizione contiene cinque parole.
b) questa proposizione contiene otto parole.
c) esattamente una proposizione, fra queste, è falsa.

Una versione del paradosso del cartello

a) quello che vi è scritto nella frase «b» che segue è vero.
b) quello che vi è scritto nella frase «a» precedente è falso.

Il paradosso del cartello fu ideato dal matematico francese **Philip Edward Bertrand Jourdain** (1879 - 1919), nel 1913.

Sembra che il logico **Filita di Coo** (340 a.C. - 285 a.C.), o **Fileta** (Φιλητᾶς, Φιλίτας; *Philētas*) morì a causa del *paradosso del mentitore*, e la testimonianza che ci ha lasciato, in un epigramma, è ancor più paradossale: *"Viandante, io sono Filita. L'argomento chiamato il Mentitore e le profonde meditazioni notturne mi condussero alla morte"* .

Il paradosso delle due porte in Labyrinth

Sarah si trova davanti a due porte, una rossa ed una blu; per proseguire deve risolvere l'enigma che consiste nell'indovinare quale porta conduce al castello (l'altra porta conduce a morte certa).

Sarah ha la possibilità di porre una sola domanda ad una della due porte, sapendo che una porta dice e sempre e soltanto il vero, mentre l'altra dice e sempre e soltanto il falso; quale domanda deve porre?

Ad una qualsiasi di una delle due porte si deve chiedere:

Se tu fossi l'altra porta e io ti chiedessi di indicarmi la porta che conduce a morte certa, quale porta mi indicheresti?

In entrambi i casi verrà indicata la porta che conduce al castello.

Appendice «1c»

Il colore del mantello dell'orso

Proemio

Un noto problema logico recita:

***un orso esce dalla sua tana, percorre* 10 km *verso* Sud*, poi percorre* 10 km *verso* Est*, infine percorre* 10 km *verso* Nord *ritrovandosi nuovamente al punto di partenza*; *di che colore è il suo mantello*?**

La risposta corretta è: bianco.

La risposta è corretta, ma non è corretto, in genere, il ragionamento che ha condotto ad una tale risposta, che viene motivata con la deduzione che esista un unico punto sulla Terra (esattamente il *Polo nord*) in cui può verificarsi una tale situazione.

Un'alternativa

Il verità, per contro, il *Polo nord* non è l'unico punto della Terra in cui può verificarsi una simile situazione.

Ipotizziamo che la tana dell'orso sia posta in uno qualsiasi degli infiniti punti che giacciono sul parallelo «P1» che si trova a «10 km» (misurati sulla superficie ellissoidica tarrestre) a Nord del parallelo «P2» della lunghezza di «10 km».

Seguiamo il nostro orso

L'orso esce dalla sua tana posta in «T», in uno qualsiasi dei punti che giacciono sul parallelo «P1», percorre «10 km» verso Sud lungo il meridiano «M1» che passa per «P1» e si trova nel punto «T1» posto sul parallelo «P2» e sullo stesso meridiano «M1».

Percorre poi «10 km» verso Est lungo il parallelo «P2» (se fosse andato verso Ovest non sarebbe cambiato nulla) ritrovandosi nuovamente nel punto «T1» dato che il parallelo «P2» è lungo proprio «10 km».

Percorre infine «10 km» verso Nord lungo il meridiano «M1» ritrovandosi esattamente al punto di partenza «T1» davanti alla sua tana, come richiedeva il problema.

Ma non finisce qui

La tana dell'orso potrebbe trovarsi anche o in uno degli infiniti punti che giacciono sul parallelo «P3» che si trova a «10 km» (misurati sulla superficie ellissoidica terrestre) a Nord del parallelo «P4» della lunghezza di «5 km o $^{10}/_{2}$ km», che dovrà essere percorso esattamente due volte, o in uno degli infiniti punti che giacciono sul parallelo «P4» che si trova a «10 km» (misurati sulla superficie ellissoidica terrestre) a Nord del parallelo «P5» della lunghezza di «$^{10}/_{3}$ km o $3,\bar{3}$ km o $^{30}/_{9}$ km», che verrà percorso esattamente tre volte.

Ed ancora più a Sud in uno degli infiniti punti che giacciono sui paralleli «Pn» che si trovano a «10 km» (misurati sulla superficie ellissoidica terrestre) a Nord dei paralleli «Pn+1» della lunghezza di «$^{10}/_{n}$ km» (con «n» numero o naturale od ed intero e positivo), che dovranno essere percorsi esattamente «n» volte.

Sembra, pertanto, che siamo riusciti a smontare la conclusione di un noto problema logico, ma vi è un grosso problema: presso il *Polo sud* non vi sono orsi, né bianchi né bruni.

Dobbiamo ammettere, pertanto, che, anche se per altre motivazioni, il mantello dell'orso deve essere di colore ***bianco***.

Osservazioni

Considerando la Terra una sfera perfetta di raggio «r = 6 371 km», il parallelo della lunghezza di «10 km» si troverebbe ad una latitudine di circa «φ = 89,98° S (89° 58' 48" S)».

Appendice «1d»

Strategie vincenti in alcuni giochi matematici

Il 20 vince (1° versione)

Si pongono 20 gettoni sul tavolo e ad ogni turno i due giocatori possono ritirare od uno o due gettoni; il giocatore che ritira l'ultimo gettone vince.

Dovrebbe essere semplice capire che il giocatore che lascia, sul tavolo, gli ultimi 3 gettoni, vincerà sicuramente alla successiva giocata.

Generalizzando, possiamo affermare che se si lascia sul tavolo un numero di gettoni multiplo di 3, si vince sempre.

Ciò permette di formulare la *strategia vincente*: se nella posizione iniziale vi sono 20 gettoni, il primo giocatore potrà vincere sempre togliendo 2 gettoni alla prima giocata e poi lasciando, sul tavolo, un numero di gettoni multiplo di 3 (se il secondo toglie un gettone, il primo ne toglierà 2 e viceversa).

Il 100 vince

Il primo giocatore annuncia un numero, da 1 a 10, il secondo giocatore pensa un numero da 1 a 10 e lo somma al numero annunciato dal primo giocatore e lo annuncia a sua volta; il gioco continua in maniera che, a turno, ciascun giocatore somma all'ultimo risultato un numero da 1 a 10 ed annuncia il nuovo risultato; il giocatore che può annunciare, come ultimo risultato, il numero 100, vince.

Dovrebbe essere semplice capire che il giocatore che può annunciare 89 vince (se l'altro giocatore aggiungesse 1 si avrebbe 90 ed aggiungendo 10 si potrebbe annunciare 100; se l'altro giocatore aggiungesse 10 si avrebbe 99 ed aggiungendo 1 si potrebbe annunciare 100).

Per poter annunciare 89 bisogna, però, poter annunciare 78 ed andando a ritroso, poter annunciare 67 ed ancora 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Ciò permette di formulare la *strategia vincente*: Il primo giocatore potrà vincere sempre annunciando 1 (se il secondo giocatore, aggiungendo 1, annuncia 2, lui potrà annunciare 12; se il secondo giocatore, aggiungendo 10, annuncia 11, lui potrà sempre annunciare 12).

Avendo annunciato 12 può, dopo l'annuncio del secondo giocatore (non ha importanza quale numero questi annuncia, può annunciare soltanto dal 13 al 22) annunciare il 23.

Cosi via è in grado di annunciare il 34 e poi il 45 ed il 56 ed il 67 ed il 78 ed il 89, ed infine vincere.

Il gioco del Marienbad

Si dispongono sul tavolo quattro gruppi di elementi: e «a» e «b» e «c» e «d» costituiti rispettivamente da ed 1 e 3 e 5 e 7 gettoni; a turno ciascun giocatore toglie il numero di gettoni che desidera, ma soltanto da un unico gruppo (minimo 1 gettone massimo tutti quelli che vi sono in quel momento).

Vince la partita il giocatore che ritira l'ultimo gettone.

La *strategia vincente* per il ***Marienbad*** è più complessa da individuare, rispetto a quelle degli altri giochi qui presentati; iniziamo con l'esprimere la quantità di gettoni di ogni gruppo con numeri in base due (sistema binario), e poniamo questi numeri in modo che risultino incolonnate le unità corrispondenti a ciascun di essi.

Nel nostro caso abbiamo, come detto, quattro gruppi rispettivamente di 1, di 3, di 5, di 7, gettoni:

Gruppo a	1	in base due	1
Gruppo b	3	in base due	11
Gruppo c	5	in base due	101
Gruppo d	7	in base due	111

La strategia vincente consiste nel mantenere la somma dei numeri di ogni colonna, espressi nel sistema binario, pari a zero «0», senza considerare un eventuale riporto; per comprendere meglio questa strategia e meglio vedere un esempio concreto.

Costatato che nella posizione iniziale, la somma dei numeri in ogni colonna, espressi nel sistema binario, è pari a zero «0», il primo giocatore non potrà mai vincere, se il secondo gioca correttamente; esiste si una *strategia vincente*, ma solo per il secondo giocatore.

Qualsiasi giocata faccia, il primo giocatore dovrà lasciare inevitabilmente almeno una colonna con somma pari ad uno «1»; supponiamo che il primo giocatore elimini un gettone dal gruppo «b» in cui ve ne sono 3:

Gruppo a	1	in base due	1
Gruppo b	2	in base due	10
Gruppo c	5	in base due	101
Gruppo d	7	in base due	111

A questo punto il secondo giocatore dovrà modificare un numero in modo che la colonna di destra abbia somma pari a zero «0» (e le altre restino uguali, dato che in esse la somma è già pari a zero «0»); dovrà, pertanto, togliere un solo gettone da un qualsiasi gruppo, eccetto dal gruppo «b» che ora contiene solo due gettoni.

Il secondo giocatore, potrebbe, ad esempio, eliminare un gettone dal gruppo «d» ripristinando la somma pari a zero «0» nella prima colonna

Gruppo a	0	in base due	1
Gruppo b	2	in base due	10
Gruppo c	5	in base due	101
Gruppo d	7	in base due	110

Se il secondo giocatore riuscirà a far in modo che sempre, ogni volta che tocca lui a giocare, la somma di ogni colonna sia pari a zero «0» (il primo giocatore non dovrebbe riuscirci mai), vincerà sicuramente.

Il 20 vince (2° versione)

Si pongono 20 gettoni sul tavolo e ad ogni turno i due giocatori possono ritirare od 1 o 3 o 5 gettoni; il giocatore che ritira l'ultimo gettone vince.

A prima vista sembra una e semplice ed innocua variante del **Il 20 vince (1° versione)**, ma in verità il gioco dimostra subito che il secondo giocatore vince sempre, anche contro la propria volontà, senza dover applicare alcuna strategia.

Ragioniamo: sul tavolo vi sono 20 gettoni (numero pari) ed il primo giocatore ne può prendere o 1 o 3 o 5 (tutti numeri dispari); il numero di gettoni che rimarranno sul tavolo sarà, pertanto, dispari (pari meno dispari dà dispari).

Il secondo giocatore dovrà ritirare, parimenti, o «1» o «3» o «5» gettoni, lasciando sul tavolo un numero di gettoni pari (dispari meno dispari dà pari).

In questo modo, costatato che il primo giocatore lascerà sul tavolo sempre un numero di gettoni dispari, mentre il secondo giocatore lascerà sul tavolo sempre un numero di gettoni pari, la vittoria spetterà sempre al secondo giocatore.

Lo stesso ragionamento vale per un numero qualsiasi *pari* di gettoni posti sul tavolo; nel caso il numero di gettoni iniziale, posti sul tavolo, fosse *dispari*, vincerebbe inevitabilmente sempre il primo giocatore.

. . . ed ancora

Se ti interessa la strategia per vincere al gioco del Tris, vedi la Dispensa dello stesso Autore *Strategie nel gioco del Tris* nel sito di **Paolo Salimbeni** «http://www.paolosalimbeni.it»; vedi in «Dispense».

Appendice «1e»

Ancora e sul MCD e sul mcm

Il MCD

Vi è un altro metodo, fra i più interessanti, per trovare il **M**assimo **C**omun **D**ivisore di due o più numeri, basato sull'insiemistica.

Cerchiamo il MCD fra i numeri: 20, 30

I divisori di «20» sono: 1, 2, 4, 5, 10, 20

I divisori di «30» sono: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 30

I numeri e «20» e «30» hanno in comune i divisori: 1, 2, 5, 10; fra questi il «10» è il maggiore e viene, pertanto, chiamato **M**assimo **C**omun **D**ivisore o **MCD**.

Con una definizione un poco più complessa possiamo affermare che il **MCD** è il maggiore fra gli elementi dell'insieme dei divisori comuni fra gli elementi dei due insiemi A(20), B(30):

$A(20) \cap B(30) = \{1, 2, 5, 10\}$

La notazione corretta è: **MCD(20,30) = 10**

Possiamo quindi dire che con il metodo insiemistico, per calcolare il **MCD** *tra due o più numeri, si elencano gli insiemi dei divisori dei numeri dati, si calcola l'insieme intersezione e il* **MCD** *sarà l'elemento maggiore dell'insieme intersezione.*

Divisori di un numero

Per trovare i divisori di un qualsiasi numero, iniziamo con lo scomporre il numero in ***Fattori primi***.

Prendiamo in considerazione il numero «540» e scomponiamolo in fattori primi.

$\mathbf{540 = 2^2 \bullet 3^3 \bullet 5}$

Costruiamo una tabella nella quale scriviamo, oltre al numero «1», il primo fattore, in questo caso il «2», dapprima con esponente «1» e, successivamente, con esponente via via superiore fino all'esponente maggiore con cui compare nella scomposizione, in questo caso il «2» compare con l'esponente maggiore «2», pertanto si ha:

1	2	2^2	

In una seconda riga scriviamo, oltre al numero «1» il secondo fattore, in questo caso il «3», dapprima con esponente «1» e, successivamente, con esponente via via superiore fino all'esponente maggiore con cui compare nella scomposizione, in questo caso il «3» compare con l'esponente maggiore «3», pertanto si ha:

1	2	2^2	
1	3	3^2	3^3

In una terza riga scriviamo, oltre al numero «1» il terzo fattore, in questo caso il «5», dapprima con esponente «1» e, successivamente, con esponente via via superiore fino all'esponente maggiore con cui compare nella scomposizione, in questo caso il «5» compare con l'esponente maggiore «1», pertanto si ha:

1	2	2^2	
1	3	3^2	3^3
1	5		

Proseguiamo così fino ad considerare tutti i fattori primi associati a quel numero, nel nostro caso il numero è il «540» e i fattori primi sono ed il «2» ed il «3» ed il «5».

Ora sviluppiamo le potenze all'interno della tabella precedente; ottenendo i valori numerici che riportiamo nella tabella sottostante.

1	2	4	
1	3	9	27
1	5		

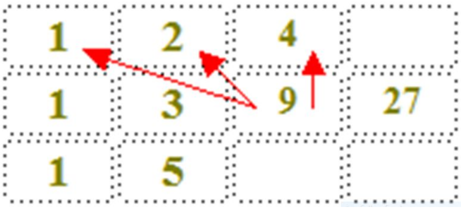
Adesso dobbiamo moltiplicare tutti i numeri della prima riga per ogni numero della seconda riga; facciamolo.

Quindi: **1, 2, 4**

Proseguiamo.

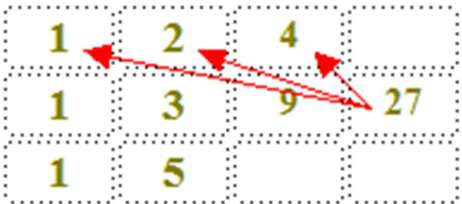
Quindi: **1, 2, 4, 3, 6, 12**

Proseguiamo.



Quindi: **1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36**

Proseguiamo.



Quindi: **1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108**

Moltiplichiamo, poi, tutti i numeri così trovati per ogni numero che era presente nella terza riga nelle precedenti tabelle.

1	2	4	3	6	12	9	18	36	27	54	108
1	5										

Quindi: **1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540**

Disponiamo, infine, i divisori del numero 540 in ordine crescente, ottenendo:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 27, 30, 36, 45, 54, 60, 90, 108, 135, 180, 270, 540.

Osservazioni

Abbiamo trovato «24» divisori del numero 540, ma siamo certi di non averne saltato qualcuno? Seguendo il metodo appena descritto è improbabile, ma seguendo certe scorciatoie è possibile che ciò avvenga.

Per essere certi di averli considerati tutti, riprendiamo la scomposizione in fattori primi.

$$540 = 2^2 \bullet 3^3 \bullet 5$$

Consideriamo gli esponenti dei tre fattori primi (in questo caso tre) che risultano rispettivamente: 2, 3, 1.

Aumentiamo, poi, ciascuno degli esponenti di un'unità ottenendo i valori: 3, 4, 2; moltiplichiamo, infine, fra loro i valori così ottenuti.

$$3 \bullet 4 \bullet 2 = 24$$

Che è appunto il numero dei divisori del numero «540».

Una volta disposti i divisori del numero 540 in ordine crescente, osserviamo.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 27, 30, 36, 45, 54, 60, 90, 108, 135, 180, 270, 540.

Se eseguiamo il prodotto del primo coll'ultimo numero di tale sequenza, otteniamo il valore 540, ma parimenti avviene se moltiplichiamo o il secondo col penultimo o il terzo col terzultimo o il quarto col . . .; possiamo pertanto affermare che disponendo in ordine crescente tutti i divisori di un numero, il prodotto di due di essi equidistanti dagli estremi è uguale al numero dato.

Curiosità sul MCD

Il MCD fra due o più numeri è uguale ad «1» quando:

i numeri non hanno alcun divisore comune, escluso l'«1».
il più grande di tutti i numeri è un numero primo.
almeno due sono numeri consecutivi.
almeno due sono numeri consecutivi dispari.

Il MCD fra due o più numeri:

non è mai più grande del numero più piccolo presente.
è uguale a «2» quando tutti i numeri sono consecutivi pari.

Il mcm

Parimenti vi è un altro metodo, fra i più interessanti, per trovare il minimo comune multiplo di due o più numeri, basato sempre sull'insiemistica.

Cerchiamo il minimo comune multiplo fra i numeri: 20, 30

I multipli di «20» sono: 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, . . .
I multipli di «30» sono: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, . . .

Il più piccolo valore dei divisori che i numeri e «20» e «30» hanno in comune è il «120»; esso viene chiamato **m**inimo **c**omune **m**ultiplo o **mcm**.

Seguendo un altro procedimento, cerchiamo gli insiemi e dei multipli di «20», che chiameremo «A», e dei multipli di «30», che chiameremo «B».

A(20) = {20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, . . .}
B(30) = {30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240}

Possiamo, pertanto, trovare l'insieme «C», ottenuto dall'intersezione degli insiemi e «A» e «B», contenente gli elementi che appartengono sia ad «A» sia a «B».

C = A(20)∩B(30) = {120, 180, . . .}

Nell'insieme «C» sono stati riportati solo due elementi fra gli infiniti

dei vari elementi che compongono l'insieme intersezione «C» (ovvero: 120, 180, . . .) il più piccolo è il «**120**»; esso, dunque, è il **minore tra i multipli comuni dei numeri dati**.

Curiosità sul mcm

Il mcm fra due numeri è uguale al prodotto dei numeri presenti, quando:

il più grande dei due è un numero primo.
i numeri sono primi fra loro.
i numeri sono consecutivi.
I numeri sono dispari consecutivi.

Correlazione fra MCD e mcm

Se conosciamo il MCD fra due numeri, possiamo trovare il mcm, fra gli stessi numeri con un procedimento molto veloce.

Consideriamo due numeri: 120, 246.
Scomponiamo in fattori primi il 120: $2^3 \bullet 3 \bullet 5$.
Scomponiamo il 246: 2 • 3 • 41.
Il loro MCD è: 2 • 3 = 6.
Dividiamo uno qualsiasi dei numeri considerati (o il «120» o il «246», a nostra scelta) per il loro MCD.

Dividiamo il «120»: $\frac{120}{6} = 20$

Moltiplichiamo in risultato così ottenuto per l'altro numero (nel nostro caso il «246»).

20 • 246 = 4 920.

e troviamo il mcm dei numeri considerati: 120, 246.

Infatti: mcm(120, 246) = $2^3 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 41$ = 4 920.

Appendice «1f»

Ancora sui logaritmi

Definizione di logaritmo

Il ***logaritmo*** di un numero «b», in base «a», è l'esponente «x» da dare alla base «a» per ottenere il numero dato «b».

In formula:

$$a^x = b$$

Limitazioni dei logaritmi

Il ***logaritmo***, in matematica, ci permette di trovare il valore dell'*esponente* da attribuire ad un determinato numero di *base* per avere come risultato un *valore* dato.

In formula:

$$x = \log_a b$$

In cui: «a» è la base - «b» è l'argomento - «x» è il logaritmo in base «a» di «b»; con «a» e «b» appartenenti a ℝ (a, b ∈ ℝ), ossia all'insieme dei ***numeri reali***, e con «a > 0», «a ≠ 1», «b > 0».

Il valore «a», ossia la base del logaritmo, deve essere necessariamente e maggiore di zero «a > 0» e diverso da uno «a ≠ 1».

Se fosse «a = 0», non potremmo trovare un esponente per lo zero, poiché zero moltiplicato per se stesso dà sempre zero.

Se fosse «b = 0», non avrebbe senso calcolare il logaritmo, poiché un numero, anche lo zero, elevato zero da come risultato l'uno.

Se invece avessimo una ***base negativa***, ad esempio «-3», e volessimo calcolare il logaritmo di 25, dovremmo risolvere «$\log_{-2} 3 = x$», ossia trovare un numero che permetta al "-3" di dare come risultato il «25» il che non è possibile all'interno dei numeri reali; all'interno dei numeri reali «ℝ » è possibile elevare a potenza solo una base positiva.

Un esempio

Un esempio pratico; se la nostra base fosse «6», quale sarebbe il logaritmo di «1 296»? Quale esponente si dovrebbe dare al «6» per ottenere il numero «1 296»?.

Forse ci potremmo rendiamo subito conto che «1 296 = 6 • 6 • 6 • 6», ossia «6» elevato alla quarta potenza «6^4».

Proprietà dei logaritmi

Il *logaritmo in base* «a» *di* «1» *è uguale a* «zero».

$$\log_a 1 = 0$$

Esempio: $\log_8 1 = 0$ (infatti, $8^0 = 1$).

Il *logaritmo in base* «a» *di* «a» (base = argomento) *è uguale ad* «uno».

$$\log_a a = 1$$

Esempio: $\log_7 7 = 1$ (infatti, $7^1 = 7$).

***Il logaritmo in base «a» di un prodotto* (b • c) *è uguale alla somma dei logaritmi in base* «a» *dei due fattori* «b» *e* «c».**

$$\log_a (b \bullet c) = \log_a b + \log_a c$$

Esempio: $\log_2 (4 \bullet 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$ (infatti $2^2 = 4$, $2^3 = 8$).
$\log_2 32 = 5$ (infatti, $2^5 = 32$).

Il ***logaritmo di un prodotto*** è uguale alla somma dei logaritmi di ogni fattore presente nell'argomento del logaritmo anche con più fattori:

Esempio: $\log_a (b \bullet c \bullet d \bullet \ldots) = \log_a b + \log_a c + \log_a d + \ldots$.

***Il logaritmo in base a di una frazione è uguale alla differenza tra il logaritmo in base a del numeratore* «b» *e il logaritmo in base a del denominatore* «c».**

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Esempio: $\log_2 ({}^8/_2) = (\log_2 8) - (\log_2 2) = 3 - 1 = 2$ (infatti, $2^3 = 8$ e $2^1 = 2$).
$\log_2 4 = 2$ (infatti, $2^2 = 4$).

***Il logaritmo in base* «a» *di un numero* «b» *elevato ad* «n» *sarà uguale a* «n» *moltiplicato per il logaritmo in base* «a» *di* «b».**

$$\log_a (b^n) = n \bullet \log_a b$$

Esempio: $\log_4 (8^2) = 2 \bullet \log_4 8 = 2 \bullet 1{,}5 = 3$ (infatti, $4^{1,5} = 8$).
$\log_4 (8^2) = \log_4 64 = 3$ (infatti, $4^3 = 64$).

Facciamo un altro esempio.

Se avessimo: $\log_3 (27^4)$.
Da quanto detto potremmo scrivere: $4 \bullet \log_3 27$.
Sapendo che: $27 = 3^3$.
Potremmo, pertanto, potremmo scrivere: $4 \bullet \log_3 (3^3)$.
Proseguendo, potremmo scrivere: $3 \bullet 4 \bullet \log_3 3$.
Da cui: $12 \bullet \log_3 3$.
Sapendo che: $\log_3 3 = 1$ (*base* = *argomento*, vedi a pagina 105)
Avremmo infine: $3 \bullet 4 \bullet 1 = 12$.
Infatti: $\log_3 531441 = 12$.

Inoltre.

$$\log_a (a^n) = n \bullet \log_a a = n \bullet 1 = n$$

***Il logaritmo in base* «a» *della radice* «n» *di un numero* «b» *sarà uguale all'inverso di* «n» *moltiplicato per il logaritmo in base* «a» *di* «b».**

$$\log_a \left(\sqrt[n]{b}\right) = \frac{1}{n} \bullet \log_a b$$

Esempio: $\log_2 (\sqrt[3]{8}) = {}^1/_3 \bullet \log_2 8 = {}^1/_3 \bullet 3 = {}^3/_3 = 1$ (infatti, $2^3 = 8$).
$\log_2 (\sqrt[3]{8}) = \log_2 2 = 1$ (infatti, $2^1 = 2$).

***Il logaritmo in base* «a» *di un numero* «b» *elevato ad* «n» *il tutto sotto radice* «m» *sarà uguale a* «n» diviso «m» *moltiplicato per il logaritmo in base* «a» *di* «b».**

$$\log_a \left(\sqrt[n]{b^m}\right) = \frac{m}{n} \bullet \log_a b$$

Esempio: $\log_2 (\sqrt[2]{8^4}) = {}^4/_2 \bullet \log_2 8 = 2 \bullet 3 = 6$ (infatti, $2^3 = 8$).
$\log_2 64 = 6$ (infatti, $2^6 = 64$).

***Il logaritmo in base* «a^n» *di un numero* «b» *sarà uguale al logaritmo in base* «a» *di* «b» diviso «n».**

$$\log_{a^n} (b) = \frac{\log_a b}{n}$$

Esempio: $\log_{2^3} 4096 = \log_2 4096 / 3 = 12 / 3 = 4$ (infatti, $2^{12} = 4096$).
$\log_{2^3} 4096 = \log_8 4096 = 4$ (infatti, $8^4 = 4096$).

***Il logaritmo in base* «a^n» *di un numero* «b^m» *sarà uguale al logaritmo in base* «a» *di* «b» moltiplicato per «m» e diviso «n».**

$$\log_{a^n} (b^m) = \frac{m}{n} \bullet \log_a b$$

Esempio: $\log_{2^3} 4^5 = {}^5/_3 \bullet \log_2 4$.

***Il logaritmo in base frazionaria* «${}^1/_a$» *di un numero* «b» *sarà uguale a meno* (-) *il logaritmo in base* «a» *di* «b».**

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

Esempio: $\log_{1/2} 16 = -\log_2 16 = -4$ (infatti, $2^4 = 16$).
$\log_{1/2} 16 = \log_{0,5} 16 = -4$ (infatti, $0{,}5^{-4} = 16$).

***Il logaritmo in base* «a» *di un numero frazionario* «${}^1/_b$» *sarà uguale a meno* (-) *il logaritmo in base* «a» *di* «b».**

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

Esempio: $\log_2 (1/8) = -\log_2 8 = -3$ (infatti, $2^3 = 8$).
$\log_2 (1/8) = \log_2 0{,}125 = -3$ (infatti, $2^{-3} = 0{,}125$).

Il logaritmo in base frazionaria «$^1/_a$» di un numero frazionario «$^1/_b$» sarà uguale al logaritmo in base «a» di «b».

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b$$

Esempio: $\log_{1/2}(^1/_8) = \log_2 8 = 3$ (infatti, $2^3 = 8$).
$\log_{1/2}(^1/_8) = \log_{0,5} 0{,}125 = 3$ (infatti, $0{,}5^3 = 0{,}125$).

Il logaritmo in base «a» di un numero «b» sarà uguale all'inverso del logaritmo in base «b» di «a».

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Esempio: $\log_3 81 = 1 / \log_{81} 3 = 1 / 0{,}25 = 4$

Trasformazione di un numero «n» in un logaritmo in base «a».

$$n = \log_a (a^n)$$

Esempio: n = 3, a = 2.
$3 = \log_2 (2^3) = \log_2 8 = 3$

Trasformazione di un numero «n» in una potenza del logaritmo in base «a».

$$n = a^{\log_a n}$$

Esempio: n = 3, a = 2.
$8 = 2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$ (infatti, $\log_2 8 = 3$).

Cambio di base.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Esempio: a = 2, b = 8, c = 10.
$\log_2 8 = \log_{10} 8 / \log_{10} 2 = 3$ (infatti, $2^3 = 8$).

La derivata della funzione logaritmo.

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \bullet \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

In cui: «ln» = logaritmo naturale (in base «e»).

Inoltre:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

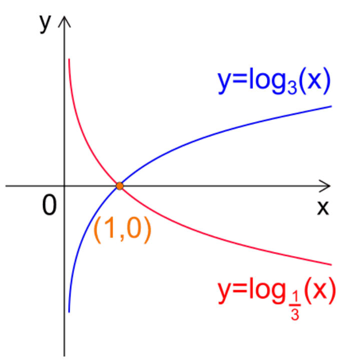
L'integrale della funzione logaritmo.

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C = x \log_a \left(\frac{x}{e}\right) + C$$

In cui: «C» è la costante di integrazione, cioè una costante reale arbitraria.

Funzione logaritmica

Si dice funzione logaritmica una funzione che si presenta nella forma:



$$y = \log_a x$$

Tutte le funzioni logaritmiche sono definite solo per «x > 0», il loro dominio, pertanto, è l'intervallo (0, +∞), e quindi il grafico di queste funzioni si troverà sempre a destra dell'asse delle «y».

Inoltre, poiché elevando a *zero* qualunque numero reale (diverso da «0») si ottiene «1», il grafico passa sempre per il punto di coordinate(1;0).

L'andamento dipende dalla base «a»; se «0 < a < 1», la funzione è strettamente decrescente (curva **rossa**), se «a > 1» è invece strettamente crescente (curva **azzurra**).

Appendice «1g»

Operazioni col sistema binario

Prefazione

Le quattro operazioni eseguite utilizzando il sistema decimale sono decisamente e semplici ed ovvie (almeno per chi è stato abituato, fin da piccolo, ad utilizzare questo sistema).

Eseguire le quattro operazioni utilizzando il sistema binario è, per contro, e meno semplice e meno intuitivo.

La moltiplicazione

Eseguiamo la moltiplicazione fra i numeri binari «101001000 · 110101011» (corrispondente a: «328 · 427» nel sistema decimale).

Sapendo che:

0 · 0 = 0
1 · 0 = 1
0 · 1 = 1
1 · 1 = 0 (con il resto di «1»).

L'operazione si esegue procedendo alla stesso modo con cui si agirebbe utilizzando il sistema decimale; il ***moltiplicando*** «101001000» viene moltiplicato per la cifra più a destra del ***moltiplicatore*** «11010101**1**» (quella in grassetto).

Il risultato è stato riportato nella riga «a».

Il *moltiplicando* viene quindi moltiplicato successivamente per ogni cifra del *moltiplicatore*, procedendo da destra verso sinistra.

I risultati sono stati riportati nelle righe; «b», «c», «d», «e», «f», «g», «h», «i».

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1							
a										1	0	1	0	0	1	0	0	0
b									1	0	1	0	0	1	0	0	0	
c								1	0	1	0	0	1	0	0	0		
d							1	0	1	0	0	1	0	0	0			
e						1	0	1	0	0	1	0	0	0				
f					1	0	1	0	0	1	0	0	0					
g				1	0	1	0	0	1	0	0	0						
h			1	0	1	0	0	1	0	0	0							
t		1	0	1	0	0	1	0	0	0								
	1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

L'addizione

Per ottenere il risultato della moltiplicazione si devono infine sommare fra di loro i numeri così ottenuti.

Sapendo che:

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 10

Per le prime *sei* colonne (a partire da destra) non vi è alcun problema; la somma delle cifre presenti nelle colonne ed «1» e «2» e «3» e «6» è *zero* (0), la somma delle cifre presenti nelle colonne e «4» e «5» è «1».

Nella colonna «7» vi sono presenti due «1» (oltre agli zeri), per cui: «1 + 1 = 10»; scrivo «0» e riporto «1» (il riporto è visualizzato nella riga gialla).

Anche nella colonna «8» vi sono presenti due «1», poiché deve essere computato anche l'«1» del riporto; scrivo «0» e riporto «1» (il riporto è sempre visualizzato nella riga gialla).

Nella colonna «9» vi sono presenti tre «1», per cui: «1 + 1 + 1 = 11»; scrivo «1» e riporto «1» (lo stesso si ha nella colonna «10»); lo «0» del riporto andrà, pertanto, sulla colonna «13» e l'«1» sulla colonna «14».

Nella colonna «12» vi sono presenti *quattro* «1» (un «1» è del riporto), per cui: «1 + 1 + 1 + 1 = 100»; scrivo «0» e riporto «10».

Il risultato del procedimento sarà: «100010001100011000» (corrispondente al valore di:

«140 056» nel sistema decimale).

La divisione senza resto

Eseguiamo la divisione fra i numeri binari «101101/101» (corrispondente a: «45/5» nel sistema decimale).

Il divisore è composto da tre cifre, per cui consideriamo i primi *tre* numeri del dividendo (a partire da sinistra).

Il «101j nel «101» ci sta una volta; scrivo «1» nel quoziente.

«1» moltiplicato «101» da «101» che scrivo sotto il «101»; eseguo la sottrazione ed abbasso l'«1».

```
101101  :  101
101        ----
------     1
0001
```

Appresso, in **azzurro** la parte già esaminata.

Il «101» nell'«1» ci sta *zero* volte; scrivo «0» nel quoziente alla destra dell'«1».

«0» moltiplicato «101» da «0» che scrivo sotto l'«1»; eseguo la sottrazione ed abbasso lo «0».

```
101101  :  101
101        ----
------     10
0001
 000
-------
 0010
```

Il «101» nell'«10» ci sta *zero* volte; scrivo «0» nel quoziente alla destra dello «0».

«0» moltiplicato «101» da «0» che scrivo sotto il «10»; eseguo la sottrazione ed abbasso l'«1».

```
101101  :  101
101        ----
------     100
0001
 000
------
  0010
   000
------
  0101
```

Il «101» nel «101» ci sta *una* volta; scrivo «1» nel quoziente alla destra dello «0».

«1» moltiplicato «101» da «101» che scrivo sotto il «101»; eseguo la sottrazione ed ottengo «000».

```
101101  :  101
101        ----
------     1001
0001
 000
------
 0010
  000
------
  0101
   101
------
   000
```

Il *quoziente*, anzi in questo caso il *quoto*, della divisione «$^{101101}/_{101}$», nel sistema binario è, pertanto, «1001» (corrispondente a: «9» nel sistema decimale).

Infatti

```
1 · 20 = 1 +
0 · 21 = 0 +
0 · 22 = 0 +
1 · 23 = 8 =
----------
         9
```

Vai a: **Conversione da base 2 (numeri binari$_2$) a base 10 (numeri decimali$_{10}$)**, a pagina 16.

Osservazioni

In matematica, il ***quoziente*** (dal latino *quotiens*: quante volte, derivato da *quot* : quanti) è il nome dato al risultato della divisione; quando il resto del la divisione è zero, il risultato viene anche chiamato ***quoto*** (dal latino *quotus*: quanto, in qual numero, sempre derivato da *quot*).

La divisione con resto

Eseguiamo la divisione fra i numeri binari «101101/110» (corrispondente a: «45/6» nel sistema decimale).

Il divisore è composto da tre cifre, per cui consideriamo le prime tre cifre del dividendo (a partire da sinistra).

```
101101 : 110
```

Il «110» nel «101» ci sta *zero* volte per cui considero le prime quattro cifre del dividendo, ossia «1011».
Il «110» nel «1011» ci sta *una* volta; scrivo «1» nel quoziente.
«1» moltiplicato «110» da «110» che scrivo sotto il «1011»; eseguo la sottrazione ed abbasso lo «0».

```
101101 : 110
 110     ----
------   1
 1010
```

La sottrazione

Abbiamo eseguito la sottrazione fra i numeri «1011 – 110 = 101».

Vediamola con più attenzione.

1011	«1» meno «0» da «1».
110	«1» meno «1» da «0».
----	«0» meno «1» non può essere eseguito, per cui si esegue
1011	l'operazione «10 – 1 = 1».

Proseguiamo con «La divisione con resto»

Il «110» nel «1011» ci sta *una* volta; scrivo «1» nel quoziente, a destra dell'«1».
«1» moltiplicato «110» da «110» che scrivo sotto il «1010»; eseguo la sottrazione ed abbasso l'«1».
Il «110» nel «1001» ci sta *una* volta; scrivo «1» nel quoziente, a destra dell'«1».
«1» moltiplicato «110» da «110» che scrivo sotto il «1001»; eseguo la sottrazione ed ottengo «11».
Il «110» nel «11» non ci sta per cui l'operazione termina qui.

```
101101 : 110
 110      ----
------   111
 1010
  110
------
  1001
   110
------
    11

    11 resto
```

Il *quoziente* della divisione «$^{101101}/_{110}$», nel sistema binario, è, pertanto, «111» (corrispondente a: «7» nel sistema decimale).

Il resto

Verifica sul resto

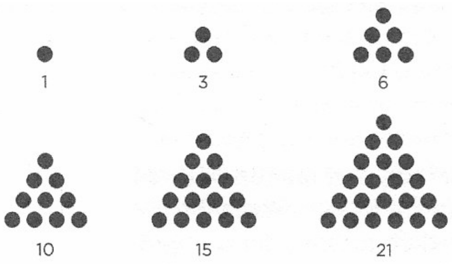
Il quoziente della divisione «$^{101101}/_{110}$» è «111».
Moltiplichiamo il quoziente «111» per il divisore «110», ed otteniamo «101010».
Sottraiamo il risultato precedente «101010» dal dividendo «101101» e otteniamo «11» (corrispondente a: «3» nel sistema decimale).

Appendice «1h»

I numeri triangolari

Premessa

Un ***numero triangolare*** è un numero poligonale le cui unità possono essere ricomposte sotto forma di un triangolo equilatero (numeri figurati); si considera che, per convenzione, il primo numero triangolare è l'uno (1).



Osservazioni

Il concetto di numero triangolare fu introdotto dal e matematico e taumaturgo ed astronomo e scienziato greco **Pitagora da Samo** (572 a.C.? – 500 a.C.?) [in greco antico: Πυθαγόρας, *Pythagóras*].

Esaminando il valore dei primi numeri triangolari (figura a sinistra), si può notare che esso coincide con il valore della serie «T_n» della somma dei primi «n» numeri naturali (vedi: **La somma dei primi «n» numeri interi positivi**, a pagina 40).

$$T_n = \frac{n \bullet (n+1)}{2} \qquad [01]$$

In cui: T_n = somma dei primi «n» termini della successione – n = numero dei termini che compongono la base.

Dimostrazioni

Dimostriamo, la formula, per induzione su «n»; per far ciò occorre verificare che la formula sia valida e per «n» e per ogni successore di «n», ovvero per «n + 1».

Per «n = 1» la verifica è banale:

$$T_1 = \frac{1 \bullet (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Per gli «n» successivi occorre dimostrare che:

$$T_1 = \frac{(n+1) \bullet (n+2)}{2}$$

Ragionando e proseguendo, possiamo scrivere:

$$T_{n+1} = T_n + (n+1) = \frac{n \bullet (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \bullet (n+1) + 2 \bullet (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \bullet (n+2)}{2}$$

Seguiamo, ora, un ragionamento elementare per comprendere una tale formula, a tal uopo utilizziamo il numero triangolare «T_3 = 6»..

Prendiamo ad esempio il numero triangolare «T_3 = 6» la cui base, nella ricomposizione geometrica, è composta da tre elementi (raffigurato qui a presso in «A») e sommiamolo a se stesso, il che equivale a dire che sommiamo fra loro due numeri triangolari uguali; per maggiore chiarezza indicheremo con una «**X**» le unità del primo numero triangolare e con una «**Z**» quelle del secondo.

Per meglio operare, modifichiamo la tipologia dei triangoli, trasformandoli in triangoli rettangoli, per poi ruotare il secondo rispetto al primo (raffigurazione «B»).

Avviciniamo, infine, i due triangoli in modo da ottenere un rettangolo avente un lato composto dal numero di elementi della base del triangolo e l'altro lato composto dal numero di elementi della base del triangolo più uno (raffigurazione «C»).

Nel nostro caso il rettangolo avrebbe i lati rispettivamente e di «3» e di «3 + 1» elementi con un numero di elementi pari a:

S = 3 • (3 + 1) = 3 • 4 = 12

```
  X        Z         X      Z Z Z       X Z Z Z
 X X  +   Z Z   =   X X  +    Z Z   =   X X Z Z
X X X    Z Z Z      X X X       Z       X X X Z
      A                    B                C
```

Abbiamo ottenuto il numero di elementi di un rettangolo composto dalla somma di due triangoli uguali, per cui gli elementi che compongono ciascun triangolo è la metà.

$$T_3 = \frac{3 \bullet (3+1)}{2} = 6$$

Per ottenere la soluzione abbiamo dovuto applicare la formula [01] che è appunto la formula che ci fornisce la somma dei termini della successione.

Particolarità dei numeri triangolari

♦ La somma di due numeri triangolari consecutivi è sempre un quadrato esatto e, pertanto, tutti i quadrati si possono esprimere come somma di due numeri triangolari consecutivi: $n^2 = T_n + T_{(n-1)}$

Esempio:

$T_6 + T_7 = 21 + 28 = 49 = 7^2$

Precisazioni

Questa particolarità sembra sia stata notata, per la prima volta, dal e matematico e filosofo greco **Teone di Smirne** (70 – 135).

♦ Il quadrato di un qualsiasi numero triangolare T_n è uguale alla somma dei primi «n» numeri naturali al cubo: $(T_n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n - 1)^3 + n^3$

Esempio:

$(T_5)^2 = 15^2 = 225$

$(T_5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$

♦ Tutti i quadrati esatti dispari sono della forma: $8 \bullet T_n + 1$.

Esempio:

$13^2 = 169 = 8 \bullet 21 + 1 = 169 = 8 \bullet T_6 + 1$ essendo: $8 \bullet T_6 + 1 = 21$

♦ Vi sono infiniti numeri triangolari che sono anche quadrati esatti.

Esempio

$T_1 = 1 = 1^2$

$T_8 = 36 = 6^2$

$T_{288} = 41\,616 = 204^2$

$T_{9800} = 48\,024\,900 = 6\,930^2$

♦ Ogni numero naturale può essere scritto come somma di al massimo tre numeri triangolari, eventualmente ripetuti.

Esempio

Il numero naturale $n = 109 = 15 + 28 + 66 = T_5 + T_7 + T_{11}$

Curiosità

Questa proprietà fu scoperta da Gauss nel 1796, ed è un caso particolare del ***teorema di Fermat*** sui numeri poligonali; nel suo diario, il 18 luglio 1796 si legge: «Eureca! num = Δ + Δ + Δ» che, una volta tradotto il suo linguaggio cripto, equivale ad uno dei teoremi più noti.

♦ Tutti i numeri perfetti, numeri uguali alla somma dei loro divisori propri (vedi: **I numeri perfetti**, a pagina 49), sono numeri triangolari.

♦ i reciproci dei numeri triangolari formano la ***serie di Mengoli*** moltiplicata per «2»; la loro somma vale pertanto «2».

♦ L'n-esimo numero *pentagonale* è un terzo del numero triangolare per «3 • n -1»; ogni altro numero *triangolare* è un numero *esagonale*.

♦ La somma dei primi «n» numeri triangolari è pari all'n-esimo *numero tetraedrico*.

♦ La differenza tra l'n-esimo numero m-gonale e l'n-esimo numero (m+1)-gonale è uguale all'(n-1)-esimo numero triangolare.

Precisazioni

In matematica, un ***numero poligonale*** è un numero figurato che può essere disposto a raffigurare un poligono regolare.

♦ Il quadrato dell'n-esimo numero triangolare è uguale alla somma dei primi «n» cubi:

$$T_n^{\ 2} = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Questo risultato è noto come ***teorema di Nicomaco***, dal nome del matematico greco **Nicomaco di Gerasa** (≈60 - ≈120).

♦ Se «m» è un numero triangolare, lo sino anche i numeri: $m \bullet (2 \bullet k + 1)^2 + T_k$.

♦ La differenza dei quadrati di due numeri triangolari consecutivi è il cubo dell'indice del maggiore: $n^3 = T_n^2 - T_{(n-1)}^2$

♦ La somma dei quadrati di due numeri triangolari consecutivi è il numero triangolare che ha per indice il quadrato dell'indice del maggiore: $T_n^{\ 2} + T_{(n-1)}^{\ 2} = T_{n^2}$

♦ I numeri triangolari si susseguono sempre alternando due numeri dispari a due numeri pari.

♦ Per stabilire se un numero $n \in \mathbb{N}$ è triangolare si può calcolare l'espressione:

$$m = \frac{\sqrt{8 \bullet n+1} - 1}{2}$$

Se «m» è intero allora «n» è l'm-esimo numero triangolare, altrimenti «n» non è un numero triangolare.

$$m = \frac{\sqrt{8 \bullet 6 + 1} - 1}{2} = \frac{\sqrt{48 + 1} - 1}{2} = \frac{\sqrt{49} - 1}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

Il numero «6» è il *terzo* numero triangolare.

♦ Ed ancora:
$T_{(a+b)} = T_a + T_b + a \bullet b$
$T_{(a \bullet b)} = T_a \bullet T_b + T_{(a-1)} \bullet T_{(b-1)}$

♦ $T_2 = 3$, è l'unico numero triangolare primo.

♦ Gli unici numeri triangolari uguali al prodotto di tre interi consecutivi sono (N. Tzanakis e B.M.M. de Weger, 1989):
$T_3 = 6 = 1 \bullet 2 \bullet 3$
$T_{15} = 120 = 4 \bullet 5 \bullet 6$
$T_{20} = 210 = 5 \bullet 6 \bullet 7$
$T_{44} = 990 = 9 \bullet 10 \bullet 11$
$T_{608} = 185136 = 56 \bullet 57 \bullet 58$
$T_{22736} = 258474216 = 636 \bullet 637 \bullet 638$

♦ L'unico numero triangolare noto, uguale al prodotto di quattro numeri interi consecutivi, è: $T_{15} = 120 = 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5$

♦ L'unico numero triangolare noto, uguale al prodotto di cinque numeriinteri consecutivi, è: $T_{15} = 120 = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5$.

♦ L'unico numero triangolare che sia un ***numero di Pell*** è: $T_1 = P_1 = 1$

♦ Gli unici numeri triangolari che siano anche fattoriali sono
$T_1 = 1 = 0! = 1!$
$T_3 = 6 = 3!$
$T_{15} = 120 = 5!$.

♦ Gli unici numeri triangolari che siano ***numeri di Fibonacci*** sono:
$T_1 = F_1 = F_2 = 1$
$T_3 = F_4 = 3$
$T_6 = F_8 = 21$
$T_{10} = F_{10} = 55$

♦ Gli unici numeri triangolari che siano ***numeri di Jacobsthal*** sono:
$T_1 = J_1 = J_2 = 1$
$T_2 = J_3 = 3$
$T_6 = J_6 = 21$
$T_{18} = J_9 = 171$

♦ L'unico numero triangolare che sia un ***numero di Jacobsthal – Lucas*** è: $T_1 = j_1 = 1$

♦ Gli unici numeri triangolari che siano ***numeri di Mersenne*** sono:
$T_1 = 1 = 2^1 - 1$
$T_2 = 3 = 2^2 - 1$
$T_5 = 16 = 2^4 - 1$
$T_{90} = 4095 = 2^{12} - 1$.

Alcune occorrenze dei numeri triangolari in teoria dei grafi

Un grafo con «n» vertici ha, al massimo, «T_n» archi.
Il numero di possibili grafi con «*n*» vertici etichettati (cioè distinguibili) è «2^{T_n}».
Il numero di possibili grafi con *n* vertici etichettati (cioè distinguibili) e *k* archi è:

$$N_g = \binom{T_n}{k}$$

Appendice «1i»

I numeri ciclici

Premessa

Se la frazione «1/n», con «n» numero primo, ha il maggior periodo possibile, ovvero un periodo della lunghezza pari a «n – 1 = m», allora il periodo è un ***numero cicl ico*** o ***numero circolare***.

Si definisce ***numero ciclico*** quel numero di «m» cifre che ha le seguenti caratteristiche:

- moltiplicato per un numero da «1» a «m», dà come risultato un numero che contiene le stesse cifre del numero di partenza, in ordine traslato.
- moltiplicato per «m + 1 = n», dà come risultato una sequenza di «n» cifre «9», (ovvero 10n - 1).

Alcune proprietà

Moltiplicando un numero ciclico di «m» cifre per un numero qualsiasi e sommando i gruppi di m cifre si ottiene nuovamente la stessa sequenza di numeri.

Moltiplicando per un multiplo di «n = m + 1» il risultato della somma è sempre una sequenza di «m» cifre «9».

Applicando tali proprietà all'esempio:

$142857 \bullet 633 = 90428481 \Rightarrow 90 + 428481 = 428571$
$142857 \bullet 540 = 77142780 \Rightarrow 77 + 142780 = 142857$
$142857 \bullet (7 \bullet 55) = 54999945 \Rightarrow 54 + 999945 = 999999$

Per iniziare

Il numero ciclico più piccolo è «142857», di «m = 6» cifre; è il periodo dell'espressione decimale di «1/7 = 0,*142857* 142857 142857 142857 . . .».

Le proprietà sono rispettate:

$1 \bullet 142857 = 142857$
$2 \bullet 142857 = 285714$
$3 \bullet 142857 = 428571$
$4 \bullet 142857 = 571428$
$5 \bullet 142857 = 714285$
$6 \bullet 142857 = 857142$
$7 \bullet 142857 = 999999$

Moltiplicando per i numeri da 1 a «m = 6», si ottiene lo stesso numero, con le cifre traslate; moltiplicando invece per «n = m + 1 = 7», si ottengono «m = 6» cifre «9».

Altri numeri ciclici primi

Se non si ammettono numeri che inizino con zero, allora «142857» è l'unico numero ciclico in *base decimale*; se si ammettono zeri iniziali, i più piccoli numeri ciclici sono:

$^1/_7$ = 142857 (6 cifre)
$^1/_{17}$ = 0588235294117647 (16 cifre)
$^1/_{19}$ = 052631578947368421 (18 cifre)
$^1/_{23}$ = 0434782608695652173913 (22 ci fre)
$^1/_{29}$ = 0344827586206896551724137931 (28 cifre)
$^1/_{47}$ = 0212765957446808510638297872340425531914893617 (46 ci fre)
$^1/_{59}$ = 0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661 (58 cifre)
$1/_{61}$ = 016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459 (60 cifre)

Altre proprietà

- Un numero ciclico di «m» cifre può essere scomposto in gruppi di «x» cifre (dove «x» è un fattore di «m») che sommati danno una serie composta da «x» numeri «9».

Nell'esempio, il numero è di m = 6 cifre, quindi si potrà applicare questa proprietà scomponendo in gruppi di o di «1» o di «2» o di «3» cifre (fattori di 6).

$1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 \Rightarrow 2 + 7 = 9$
$14 + 28 + 57 = 99$
$142 + 857 = 999$

- Considerando le prime due cifre di un numero ciclico, raddoppiando e sommando consecutivamente, spostando di due posti verso destra, si ottiene in successione sempre il numero ciclico.

Controlliamo col numero ciclico «142857»:

```
14             +
  28           +
    56         +
     112       +
       224     +
         448   +
           856 =
---------------
1428571428....
```

- Considerando la cifra «n = m + 1», moltiplicando per cinque e sommando consecutivamente, spostando di una cifra verso sinistra, si ottiene di nuovo il numero ciclico.

Controlliamo col numero ciclico «142857»:

```
            7 +
          35  +
        175   +
       875    +
     4375     +
   21875      +
 109375       +
546875        =
--------------
.....57142857
```

Appendice «1I»

Il calcolo combinatorio
Permutazioni, Disposizioni, Combinazioni

Definizione

Il ***calcolo combinatorio*** è una banca della matematica orientata allo sviluppo di formule che permettono di ottenere od il numero di casi distinti che si possono presentare in un esperimento od il numero di elementi che compongono un insieme, senza dover ricorrere alla loro enumerazione.

Raggruppamenti

Possiamo distinguere tre raggruppamenti:

permutazioni
disposizioni
combinazioni

♦ Permutazioni

Si definiscono ***permutazioni semplici*** o ***permutazioni senza ripetizione*** di un insieme «***I***», un raggruppamento ordinato dei suoi elementi, nel quale ognuno degli «n» elementi è presente una ed una sola volta.

Si definiscono ***permutazioni con ripetizione*** di un insieme «***I***», un raggruppamento ordinato dei suoi elementi, nel quale fra tutti gli «n» elementi ve ne sono alcuni che si presentano più di una volta.

Il numero delle possibili ***permutazioni semplici*** di «n» elementi, indicato con «P_n», è pari al fattoriale di «n»; **n!**:

Ad esempio, le *permutazioni semplici* possibili, anche senza senso, della parola SICURA sono:

$$P_6 = \mathrm{n}! = 6! = 720$$

In cui:

gli elementi sono «5»; le *cinque* lettere della parola **SICURA**.
i posti sono «5»; i posti occupati dalle lettere della parola **SICURA**.
le «5» lettere sono tutte diverse.
Conta l'ordine con cui le lettere si susseguono.

Se nell'insieme di partenza vi sono degli elementi ripetuti, come nella parola **ERRARE**, alcune permutazioni darebbero la stessa sequenza e non dovrebbero essere computate.

Il numero delle possibili ***permutazioni con ripetizione*** di «n» elementi di cui «k1 uguali fra loro», «k_1 uguali fra loro», «k_2 uguali fra loro», . . ., «k_r uguali fra loro», essendo: $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Il numero delle *permutazioni con ripetizione* di «n» elementi con k_r, k_r, k_r, uguali fra loro, indicato con «$P_{n,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r}$», è pari a:

$$P_{n,\mathrm{k}_1,\ \mathrm{k}_2,\ \ldots,\ \mathrm{k}_\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}_1! \bullet \mathrm{k}_2! \bullet \ldots \bullet \mathrm{k}_\mathrm{r}!}$$

Ad esempio, le *permutazioni con ripetizione* possibili, anche senza senso, della parola **ERRARE** sono:

$$P_{6,2,\ 3} = \frac{6!}{2! \bullet 3!} = \frac{720}{2 \bullet 6} = \frac{720}{12} = 60$$

Osservazioni

La lettera «A» non ha ripetizioni per cui non si considera; «1!», infatti, è uguale ad «1».

In cui:

gli elementi sono «6»; le *sei* lettere della parola **ERRARE**.
i posti sono «6»; i posti occupati dalle lettere della parola **ERRARE**.
le «6» lettere ***non*** sono tutte diverse; «E» si ripete «2» volte, «R» si ripete «3» volte, «A» non si ripete.
Conta l'ordine con cui le lettere si susseguono.

Nel caso sia $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 1$, si avrà:

$$Pn_{,1,\ 1\ \ldots,\ 1} = Pn = \mathrm{n}!$$

♦ Disposizioni

Le disposizioni sono simili alle permutazioni, ma considerano solo una parte degli elementi; si hanno, pertanto, delle sequenze ordinate di lunghezza minore del numero di elementi che è possibile utilizzare.

Sia «*I*» un insieme costituito da «n» oggetti distinti e sia «k ≤ n».

Si definiscono ***disposizioni semplici*** di classe «k» i raggruppamenti ordinati di «k» elementi di «*I*» nel quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento.

Si consideri un insieme «*I*» costituito da «n» elementi distinti e sia «k» un numero naturale, senza alcuna limitazione «n ≥ k ≥ n».

Si definiscono ***disposizioni con ripetizione*** di classe «k» i raggruppamenti ordinati di «k» degli «n» elementi di «*I*» nel quale si possono avere ripetizioni o di uno o di più elementi.

Il numero delle possibili ***disposizioni semplici*** o ***disposizioni senza ripetizione*** di «n» elementi di classe «k», indicati con «$D_{n,k}$», è pari a:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad esempio, in quanti modi «n = 5» passeggeri possono accomodarsi in una coupé; la coupé ha due posti, per cui «k = 2»?

$$D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{3} = 40$$

In cui:
gli elementi sono «5»; i *cinque* passeggeri.
i posti sono «2»; i sedili presenti in una coupé.
le «5» passeggeri sono persone tutte diverse; non vi è, pertanto, ripetizione di elementi.
I sedili sono distinguibili (conducente, passeggero); conta, pertanto, l'ordine con cui le lettere si susseguono.

Il numero delle possibili ***disposizioni con ripetizione*** di «n» elementi di classe «k», indicati con «$D^r{}_{n,k}$», è pari a:

$$D^r{}_{n,k} = n^k$$

Ad esempio, quanti numeri a «k = 5» cifre si possono formare considerando le «n = 3» cifre: 1, 2, 3?

$$D^r{}_{3,5} = 3^5 = 243$$

In cui:
gli elementi sono «3»; le *tre* cifre: 1, 2, 3.
i posti sono «5»; i numeri a *cinque* cifre.
ciascuna cifra delle tre «1, 2, 3» può essere ripetuta fino a *cinque* volte;.
le cifre hanno posizioni ben definite; conta, pertanto, l'ordine con cui si susseguono.

♦ Combinazioni

Dati *n* elementi distinti e un numero intero positivo *k<=n*, si chiamano combinazioni «$C_{n,k}$» di questi *n* elementi, a *k* a *k* (o di classe *k*), tutti gruppi che si possono formare con gli elementi dati, non considerando l'ordine degli elementi.

Sia «*I*» un insieme costituito da «n» oggetti distinti e sia «k ≤ n».

Si definiscono ***combinazioni semplici***, di classe «k», tutti i «k» raggruppamenti differenti di «k» elementi di «*I*», considerati *indipendentemente dall'ordine degli elementi*, nel quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento.

Si definiscono ***combinazioni con ripetizione***, di classe «k», tutti i «k» raggruppamenti differenti di «k» elementi di «*I*», considerati *indipendentemente dall'ordine degli elementi*, nel quale si possono avere ripetizioni o di uno o di più elementi.

Il numero delle possibili ***disposizioni semplici*** di «n» elementi di classe «k», indicati con «$C_{n,k}$», è pari a:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$$

Ad esempio, Un *flair bartender* ha a disposizione cinque liquori «n = 5»; quanti cocktail può preparare utilizzando solo tre «k = 3» liquori alla volta?

Facciamo notare che il gusto di ogni cocktail non varia se si inverte l'ordine con cui gli ingredienti vengono utilizzati.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \bullet (5-3)!} = \frac{120}{6 \bullet 2} = \frac{120}{12} = 10$$

In cui:
gli elementi sono «5»; i *cinque* liquori.
i posti sono «3»; i numeri dei cocktail.
si usa una dose per ogni liquore, per cui non vi è ripetizione;.
il sapore deriva dai tipi di liquore utilizzati, non conta l'ordine con cui si mescolano.

Il numero delle possibili ***disposizioni con ripetizione*** di «n» elementi di classe «k», indicati con «$C^r{}_{n,k}$», è pari a:

$$C_{n,k}^{r} = \frac{(n+k-1)!}{k! \bullet (n-1)!}$$

Ad esempio, abbiamo due contagocce «n = 2» in uno dei quali vi sono cinque gocce di colore rosso e nel secondo cinque gocce di colore verde; mischiando fra loro cinque gocce «k = 5» scelte fra i due colori, quante tonalità di colore diversi possiamo formare?

$$C_{2,5}^{r} = \frac{(2+5-1)!}{5! \bullet (2-1)!} = \frac{6!}{120 \bullet 1!} = \frac{720}{120} = 6$$

In cui:

gli elementi sono «2»; i *due* colori.
i posti sono «5»; le gocce che vengono mischiate.
per ogni colore si dispone di cinque gocce, per cui vi è ripetizione;.
la tonalità dipende da quante gocce di ogni colore vengono utilizzate, non conta l'ordine con cui si mescolano.

Una divagazione

Il **PIN** del Bancomat è un numero a cinque cifre «k = 5» ed ogni posto può essere occupato da una delle dieci cifre (0, 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9) «n = 10»; le *disposizioni con ripetizione* sono, pertanto, $D^{r}_{10,5} = 10^5 = 100\,000$.

Sembra, per contro, che l'ultima cifra non venga considerata dai servizi ATM per cui si debba considerare soltanto «n = 4» con $C^{r}_{10,4} = 10^4 = 10\,000$; ma questa è un'altra storia.

Appendice «1m»

Il coefficiente binomiale

Prefazione

In matematica, il **coefficiente binomiale**:

$\binom{n}{k}$ che si legge («n» su «k»)

è un numero intero, non negativo, definito dalla seguente formula:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$$

Con: n ≥ 0, k ≥ 0.

Esempio:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \bullet (6-4)!} = \frac{6 \bullet 5 \bullet \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 \bullet 2!} = \frac{720}{24 \bullet 2 \bullet 1} = \frac{720}{48} = 15$$

Che è il numero di *combinazioni* di «6» elementi presi «4» alla volta Vedi in: *Il calcolo combinatorio Permutazioni. Disposizioni. Combinazioni* - ♦ Combinazioni, a pagina 122).

Le proprietà

$\binom{n}{0} = 1$ sapendo che: 0! = 1 si ha: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \bullet (n-0)!} = \frac{n!}{1 \bullet n!} = \frac{n!}{n!}\ 1$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \bullet (n-n)!} = \frac{n!}{n! \bullet 0!} = \frac{n!}{n! \bullet 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \bullet (n-1)!} = \frac{n!}{1 \bullet (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Il binomio di Newton

Avvalendoci dello ***sviluppo del Binomio di Newton***, nel quale i coefficienti binomiali forniscono un metodo rapido nello sviluppo della potenza $(a + b)^n$ senza ricorrere al *triangolo di Tartaglia*, possiamo scrivere.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \bullet b^k$$

Dalla quale ricaviamo la seguente corrispondenza.

1	$\binom{0}{0}$
1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$
1 6 15 20 15 6 1	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Esempio: $\mathbf{(a + b)^6}$

$\binom{6}{0} = 1,\quad \binom{6}{1} = 6,\quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \bullet (6-2)!} = 15,\quad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \bullet (6-3)!} = 20,$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \bullet (6-4)!} = 15,\quad \binom{6}{5} = \frac{6!}{5! \bullet (6-5)!} = 6,\quad \binom{6}{6} = \frac{6!}{6! \bullet (6-6)!} = 1.$

Per cui:

$(a + b)^6 = a^6 + \mathbf{6} \bullet a^5 \bullet b + \mathbf{15} \bullet a^4 \bullet b^2 + \mathbf{20} \bullet a^3 \bullet b^3 + \mathbf{15} \bullet a^2 \bullet b^4 + \mathbf{6} \bullet a \bullet b^5 + b^6$

Appendice «1n»

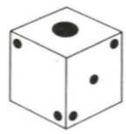
Lanciando due dadi

Prefazione

I più antichi dadi cubici che si conoscono sono stati rinvenuti in alcune tombe egizie risalenti a 3000 a.C., anche se, rispetto agli attuali dadi sono diversi per quanto riguarda ed il materiale ed il formato (diversi anche fra loro); è spesso diversa anche la distribuzione dei numeri sulle facce.

Nei dadi moderni la somma dei numeri che compaiono sulle coppie di facce opposte è sempre uguale a *sette* «7».

Se si ignora questa regola, vi sono «30» modi diversi di distribuire i numeri compresi fra «1 ÷ 6», comprese le disposizioni speculari, ma esclusi i due diversi orientamenti che possono essere dati ai segni e del «2» e del «3» e del «6» che mancano della quadruplice simmetria degli altri simboli numerici.

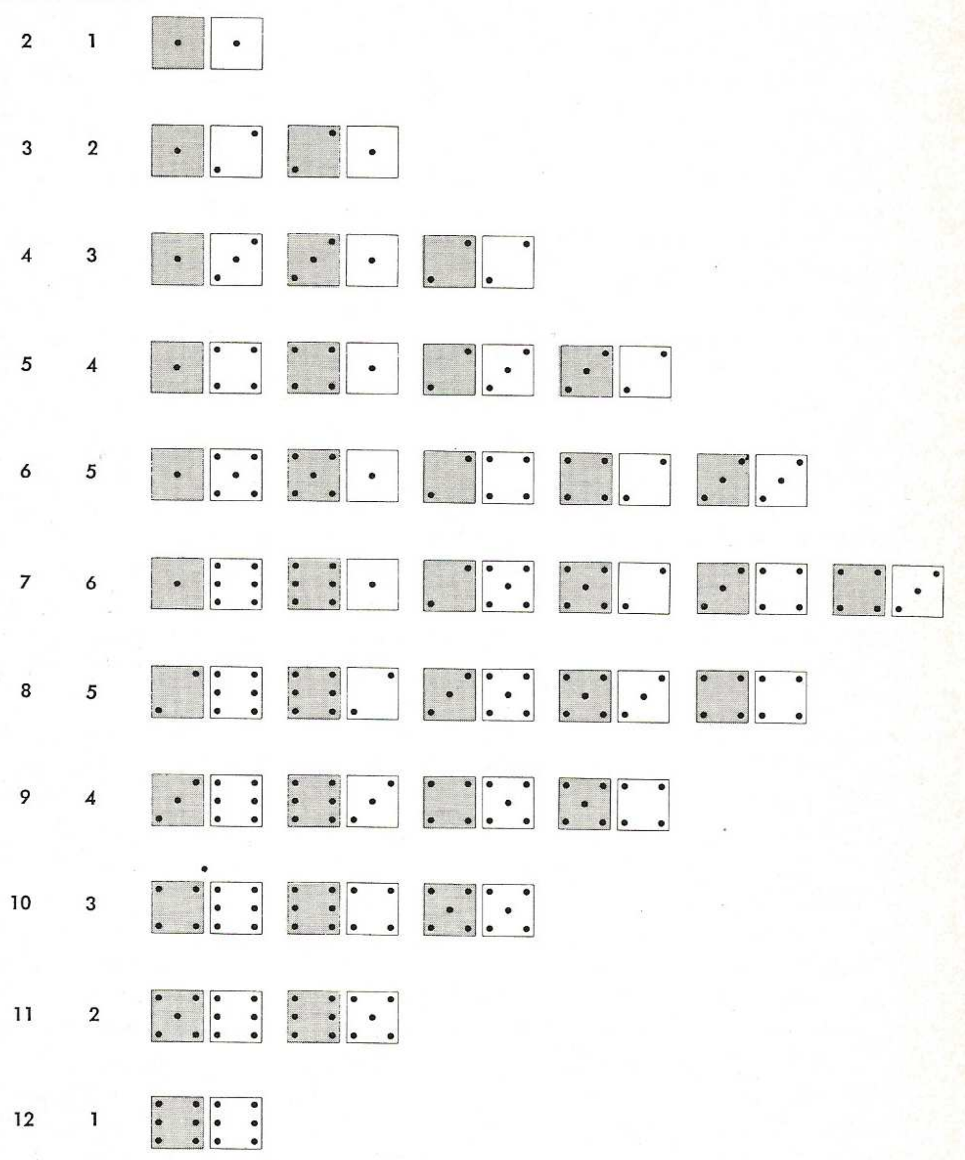


Al giorno d'oggi, in tutti i dadi prodotti in occidente il *giro* dei numeri è identico: se si tiene un dado in modo tale che presenti contemporaneamente all'osservatore le facce contrassegnate e dall'«1» e dal «2» e dal «3», i numeri sono disposti in senso antiorario.

Giochiamo

Lanciando un solo dado, le disposizioni possibili sono «6» (un dado a 6 facce e su ciascuna è indicata una cifra: 1, 2, 3, 4, 5, 6, per cui la probabilità che si presenti una certa cifra è «$^1/_6$ = 0,02777. . .».

Lanciando due dadi le disposizioni differenti possibili sono «6 • 6 = 36».



La probabilità che si presenti un certo numero, somma delle due cifre indicate dai due dadi, sono le seguenti.

$$2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} = 0{,}02777\ldots$$

$$3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = 0{,}05555\ldots$$

$$4 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = 0{,}08333\ldots$$

$$5 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = 0{,}11111\ldots$$

$$6 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} = 0{,}13888\ldots$$

$$7 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = 0{,}16666\ldots$$

$$8 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} = 0{,}13888\ldots$$

$$9 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = 11111\ldots$$

$$10 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = 0{,}08333\ldots$$

$$11 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = 0{,}05555\ldots$$

$$12 = \frac{1}{36} = \frac{1}{36} = 0{,}02777\ldots$$

Utilizzando un programma al calcolatore per simulare il lancio di due dadi contemporaneamente, si sono registrate le seguenti frequenze; nell'ultima colonna sono state riportate, per confronto, le probabilità.

Somma	**Frequenze assolute**	**Frequenze relative**	**Probabilità**
2	68	0,027200	0,027778
3	138	0,055200	0,055556
4	208	0,083200	0,083333
5	258	0,103200	0,111111
6	337	0,134800	0,138889
7	426	0,170400	0,166667
8	360	0,144000	0,138889
9	295	0,118000	0,111111
10	195	0,078000	0,083333
11	154	0,061600	0,055556
12	61	0,024400	0,027778
Totale	2500	1,000000	1,000000

Appendice «1o»

Cifre significative
nelle misure di grandezze fisiche

Definizione

Una grandezza fisica è un entità, con cui vengono descritti i fenomeni fisici e che sono suscettibili di una definizione quantitativa (cioè che sono misurabili) caratterizzata da un numero e da una unità di misura; la misura di una grandezza fisica (ossia il suo valore numerico) è data dal rapporto tra la grandezza da misurare ed un campione di quella grandezza scelto come unità di misura e viene effettuata mediante opportuni strumenti.

Ogni strumento di misura è caratterizzato da una propria e *sensibilità* e *precisione*.

La precisione

La ***precisione*** di uno strumento di misura, considerando sia esente da difetti che possano causare errori sistematici (strumento esatto), è la sua o maggiore o minore capacità di registrare sempre lo stesso risultato a parità di tutte le condizioni; in pratica, è la ripetibilità delle misurazioni.

La sensibilità

La ***sensibilità*** di uno strumento di misura è la sua capacità di poter apprezzare una certa variazione dell'entità da misurare; affermare che un cronometro ha la sensibilità di un centesimo di secondo, significa che esso può distinguere due intervalli di tempo che differiscono di un centesimo di secondo come, ad esempio: uno di «12,36 s», l'altro di «12,37 s».

Nel progettare un ottimo strumento, bisogne far in modo che e la precisione e la sensibilità abbiano lo stesso valore materializzato nella scala di lettura; quest'ultimo rappresenta il limite dello strumento.

I valore numerico di una misura sperimentale deve contenere tante cifre, dette ***cifre significative***, quante sono quelle determinabili con sicurezza mediante lo strumento di misura utilizzato, più eventualmente un'altra cifra, anch'essa significativa, che lo strumento permette di valutare con approssimazione a stima.

Esempio: **3,47**(*2*) <u>m</u> (unità di misura

In cui: in **grassetto** sono indicate le cifre o esatte o attendibili
in *corsivo* è indicata la cifra stimata o dubbia
<u>sottolineata</u> è indicata l'unità di misura

Il valore numerico di una grandezza fisica deve essere scritto sempre con un *numero appropriato di cifre significative*, in modo da non dare false indicazioni sulla precisione della misura stessa.

Esempio: se il valore di una massa, misurata con una bilancia sensibile al decimo di grammo, fosse di «10,3 g» e volessimo esprimere tale valore in milligrammi, sarebbe sbagliato scrivere «10 300 mg»; questo numero, infatti, contiene **5** cifre significative, mentre la bilancia ha fornito solo **3** cifre significative!

Correttamente si dovrebbe scrivere: 10,3 g = $1{,}03 \bullet 10^4$ mg.

Lo zero e le cifre significative

- ✓ Se lo zero è compreso fra altre due cifre diverse da zero, esso è una ***cifra significativa***.
  Esempi: 2,705 m (4 cifre significative); 5,046 (4 cifre significative)
- ✓ Se lo zero è l'ultima cifra di un numero, esso è una ***cifra significativa***.
  Esempi: 38,60 m (4 cifre significative); 1,520 m (4 cifre significative)
  40 m (2 cifre significative); 3,500 (2 cifre significative)
- ✓ Gli zeri che si trovano a sinistra di un numero, e che servono solo a localizzare la virgola, ***non*** sono ***cifre significative***.
  Esempi: 0,327 m (3 cifre significative); 0,0327 m (3 cifre significative)
  0,00280 m (3 cifre significative); 0,0040 m (2 cifre significative)
- ✓ Nel passaggio alla *notazione esponenziale*, usata per esprimere numeri o molto grandi o molto piccoli, occorre mantenere sempre il medesimo numero di ***cifre significative***.
  Esempi: 3287 m = $8{,}315 \bullet 10^3$ m (4 cifre significative);
  0,0025 m = $2{,}5 \bullet 10^{-3}$ m (2 cifre significative)

Arrotondamenti

Quando il valore numerico di una grandezza fisica contiene un numero di cifre superiore a quello delle cifre significative, esso deve essere arrotondato; l'arrotondamento si effettua eliminando tutte le cifre che seguono l'ultima cifra significativa secondo le seguenti regole.

✓ Se la prima delle cifre eliminate è maggiore di 5, si aumenta l'ultima cifra significativa di una unità.
Esempio: arrotondando a 4 cifre significative il numero 23,45**7.**
si ottiene 23,46 (il 7 è maggiore di 5).

✓ Se la prima delle cifre eliminate è minore di 5, l'ultima cifra significativa resta invariata.
Esempio: arrotondando a 4 cifre significative il numero 23,45**3.**
si ottiene 23,35 (il 3 è minore di 5).

✓ Nel caso la prima delle cifre eliminate è uguale a 5, si considera l'ultima cifra significativa.

- ♦ Se è dispari la si aumenta di una unità.
  Esempio: 21,6**3**5 diviene 21,64 (il 3 è dispari).
- ♦ Se è pari la si lascia invariata.
  Esempio: 21,8**6**5 diviene 21,68 (il 6 è pari).

Operazioni

Nell'esecuzione delle varie operazioni matematiche: *la precisione del risultato non può essere superiore alla precisione del dato sperimentale meno preciso che viene utilizzato*.

Addizione e sottrazione

Il risultato dell'operazione deve contenere lo stesso numero di decimale dell'addendo o del sottraendo che ne contiene il minor numero

Esempi: (31,**7** + 5,238 + 27,36) m = 64,298 m ⇒ 64,**3**
(**142** – 7,438) m = 134,562 m ⇒ **139** m

Moltiplicazione e divisione

Il risultato della moltiplicazione o della divisione deve contenere lo stesso numero di cifre significative presenti nel fattore meno preciso.

Esempi: 3,852 m • **2,35** $^{kg}/_{m}$ = 9,0522 kg ⇒ **9,05** kg
276 kg / **5,8** m = 47,586 . . . $^{kg}/_{m}$ ⇒ **48** $^{kg}/_{m}$

Osservazioni

Il *chilogrammo su metro* è l'unità di misura della *massa lineica* nel **S**istema **I**nternazionale..

Nei calcoli intermedi si utilizza, usualmente, una cifra significativa in più rispetto al numero esatto di cifre significative che si devono considerare, e si arrotonda al numero corretto alla fine.

Logaritmi

La caratteristica di un logaritmo non si considera; la mantissa deve contenere tante cifre significative quante ce ne sono nel numero di cui si vuole calcolare il logaritmo

Esempi: Log **3,5** • 10^5 = 5,544 . . . ⇒ 5,**54** (2 cifre ⇒ 2 cifre)
ln 2,67 • 10^4 = 10,192 419 . . . ⇒ 10,**192** (3 cifre ⇒ 3 cifre)

In cui: Log = logaritmo decimale (base 10) – ln = logaritmo o naturale o neperiano (base e).

Numeri esatti

Non tutti i numeri utilizzati nelle operazioni matematiche provengono da misure sperimentali; alcune volte essi provengono o da una definizione o da un conteggio diretto.

Questi numeri, detti ***numeri esatti***, non contengono approssimazioni e nei calcoli si possono considerare con un numero *infinito di cifre significative*.

Se si considerasse la *massa molare* del ***carbonio*-12** «^{12}C», che è un valore esatto pari a «12 $^{g}/_{mol}$», si avrebbe:

Esempio: **75,49** g / 12 $^{g}/_{mol}$ = 6,290 833 . . . mol ⇒ **6,290** mol (4 cifre ⇒ 4 cifre)

· Ogni strumento di misura è caratterizzato da una propria sensibilità, definita come la minima differenza che lo strumento è in grado di distinguere tra due misure della grandezza. Se la lettura della misura viene effettuata su una scala graduata, la sensibilità è pari alla differenza fra due valori contigui della scala ovvero alla precisione.

Se la misura di una massa fornisce il valore di «2,638 g»: significa che l'intervallo minimo tra due misure è 0,001 g e questo rappresenta la sensibilità dello strumento..

· Se non altrimenti indicato, la *precisione* della misura è pari alla *sensibilità* dello strumento, cioè pari alla variazione in più e in meno di una unità dell'ultima cifra del valore numerico, pertanto, si potrebbe scrivere che la massa misurata è «2,638 ± 0,001 g».

Sarebbe sbagliato indicare una massa ottenuta da questa bilancia con una precisione maggiore, esempio 2,6385.

Appendice «1p»

Strane risoluzione per strani problemi

Quanti pisci vi sono in un lago?

Premessa

Contare i pesci che vi sono in un lago sembra un compito particolarmente arduo, o impossibile, specie se il lago è ampio e l'acqua è torbida.

Il problema, per contro, può essere risolto utilizzando tecniche statistiche; un metodo molto usato dai biologi è quello chiamato ***pesca-ripesca***, o in generale ***cattura-ricattura***, perché non serve solo per i pesci.

Come procedere

a) Si ***pesca*** un certo numero di pesci «a», li si contrassegna e li si rimette nel lago.

Osservazioni

Naturalmente bisogna prestare attenzione che i pesci non si feriscano, mentre la marcatura non deve pregiudicare né la loro mobilità né la loro sopravivenza.

b) Si lascia trascorrere un certo lasso di tempo fino a che sia lecito presumere che i pesci marcati si siano nuovamente ridistribuiti uniformemente all'interno del lago.

Osservazioni

Potrebbero essere necessari anche alcuni giorni.

c) Si ***ripesca*** un certo altro numero di pesci «b».

Osservazioni

Il numero «r» (pesci pescati) non deve essere necessariamente uguale al numero «b» (pesci ripescati).

d) Si contano quanti pesci «c», fra quelli ripescati «b», presentano la marcatura.

Ragioniamo

Se nel lago vi sono «N» pesi di cui ne sono stati marcati «a», la proporzione fra i pesci marcati e quelli presenti nel lago è $^{a}/_{N}$.

Si ripescano «b» pesci, i quali si possono considerare un modello rappresentativo di tutti i pesci presenti nel lago, e fra questi ve ne saranno un numero «c» marcati; la proporzione fra i pesci ripescati marcati «c» e quelli ripescati «b» è $^{c}/_{b}$.

Potremmo scrivere, pertanto:

$$\frac{a}{N} \cong \frac{c}{b}$$

La stima, del numero di pesci presenti nel lago, sarà data da:

$$N \cong \frac{a \bullet b}{c}$$

Ad esempio

Si pesca e si marca un certo numero di pesci «a», che può essere considerato un modello aleatorio degni «N» pesci presenti nel lago; nel nostro caso: a = 15.

Si ripescano un certo numero di pesci pari a «b = 14» dei quali «c = 3».

La stima del numero dei pesci presenti nel lago sarà data da:

$$N = \frac{a \bullet b}{c} = \frac{15 \bullet 14}{3} = 70$$

In verità la formula appena presentata sovrastima il numero di pesci presenti nel lago; Si ottiene, per contro, un sensibile miglioramento della stima apportando alcune variazioni alla formula si da trasformarla nella:

$$N = \frac{(a+1) \bullet (b\ +1)}{c+1} - \ 1 = \frac{(15+1) \bullet (14+1)}{3+1} - 1\ = \frac{240}{4} - 1\ = 59$$

Naturalmente, nella pratica operativa si potranno introdurre altri coefficienti di correzione per poter considerare o che non tutti i pesci hanno la stessa probabilità di essere ricatturati o che il marcarli possa influire sulla loro sopravivenza o che alcuni pesci possano perdere la marcatura.

Qui, però, non si voleva analizzare tutte le difficoltà pratiche di un simile procedimento, ma si voleva semplicemente presentare un'idea.

Appendice «1q»

Quasi non ci si crede

Una corda attorno il cerchio massimo di una sfera

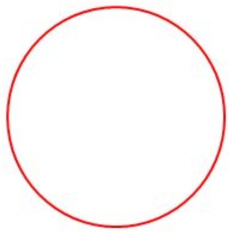
Premessa

Molto spesso i problemi matematici riservano delle inaspettate sorprese, ma in questo problema vi è qualcosa di più; avviene, infatti, che qualcuno dubiti della validità della soluzione anche sapendo che è certamente corretta.

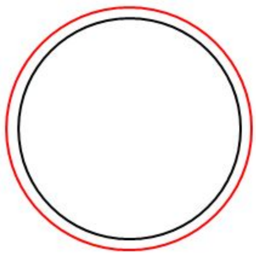
Il problema

Consideriamo la Terra una sfera perfetta il cui equatore (un suo cerchio massimo) misura esattamente «40 000 km».

Avvolgiamo l'equatore con una corda che abbia esattamente la sua stessa lunghezza (40 000 km) in modo che aderisca perfettamente alla superficie della Terra in ogni suo punto come appare nel disegno qui a destra in cui la corda è indicata in **rosso**.



Adesso consideriamo un'altra corda più lunga di un metro (la sua lunghezza sarà, pertanto, di 40 000 001 m) ed avvolgiamola lungo l'equatore; in questo caso la corda, per contro, non potrà più aderire perfettamente in ogni punto dalla superficie della Terra, ma risulterà un poco allentata.



Per poter essere più precisi, disponiamo la corda in modo, che in ogni suo punto, sia sollevata dalla Terra della medesima distanza come appare nel disegno qui a sinistra in cui la corda è indicata sempre in **rosso**.

La domanda che si pone è: **quanto misura questa distanza?** Misurerà o «0,1 mm» o «1 mm» od un altro valore?

La risposta è semplice quanto la domanda; è sufficiente conoscere la formula con la quale si calcola la circonferenza di un cerchio conoscendo il suo raggio.

Osservazioni
Nel secondo disegno, le proporzioni non sono state rispettate

$$c = 2 \bullet \pi \bullet r$$

In cui: c = lunghezza della circonferenza - π = *pi greco* (3,1415 ...) – r = lunghezza del raggio.

Se conoscessimo la circonferenza «c», potremmo ricavare il raggio «r» con la:

$$r = \frac{c}{2 \bullet \pi}$$

Calcoliamo il raggio della circonferenza dell'equatore (40 000 000 m) che, nel primo caso è il medesimo della circonferenza della corda.

$$r = \frac{c}{2 \bullet \pi} = \frac{40\,000\,000}{2 \bullet \pi}$$

Calcoliamo, ora, la lunghezza del raggio «R» della circonferenza «C» della corda allungata di «1 m», alla quale abbiamo conferito una forma perfettamente circolare.

$$R = \frac{c}{2 \bullet \pi} = \frac{40\,000\,000 + 1}{2 \bullet \pi} = \frac{40\,000\,001}{2 \bullet \pi}$$

In questo secondo caso, la distanza «d» della corda dall'equatore sarà uguale alla differenza dei due raggi (d = R – r), per cui:

$$d = R - r = \frac{40\,000\,000 + 1}{2 \bullet \pi} - \frac{40\,000\,000}{2 \bullet \pi} = \frac{40\,000\,001 - 40\,000\,000}{2 \bullet \pi} = \frac{1}{2 \bullet \pi} \approx 0{,}159$$

La distanza «d» della corda dall'equatore è, pertanto, di ≈0,16 m.

Incredibile! Anche se abbiamo calcolato il valore di «d», qualcuno, forse, continuerà ad essere incredulo.

In'oltre vi un'altra, forse inaspettata sorpresa; il risultato è indipendente dalla lunghezza della circonferenza della sfera in esame o dal raggio della sfera che consideriamo.

L'ultima equazione, infatti, potrebbe essere scritta, utilizzando il valore della circonferenza equatoriale «c» (nell'esempio c = 40 000 000 m), come la seguente equazione

$$D = \frac{c+n}{2 \bullet \pi} - \frac{c}{2 \bullet \pi} = \frac{c+n-c}{2 \bullet \pi} = \frac{n}{2 \bullet \pi} = x$$

In cui: D = incremento delle lunghezza del raggio – c = lunghezza della corda – n =

La lunghezza di «D» risulta, pertanto, indipendente dalla lunghezza di «c».

Questo vuol dire che se, ad esempio, eseguiamolo lo stesso procedimento su di una sfera di «40 m» di circonferenza, troviamo per «d» sempre lo stesso valore, Infatti:

$$d = \frac{41 + 1}{2 \bullet \pi} - \frac{40}{2 \bullet \pi} = \frac{41 - 40}{2 \bullet \pi} = \frac{1}{2 \bullet \pi} \approx 0{,}159$$

Parimenti avviene per qualsiasi valore di «c»; il valore di «d» resterà sempre lo stesso! Ancora più incredibile!

Naturalmente se a «c» aggiungessimo tre metri (3 m) il valore di «d» diverrebbe:

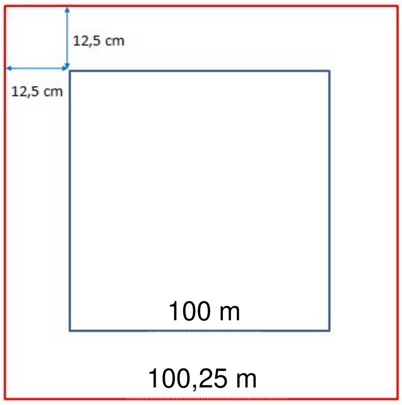
$$\mathrm{d}_3 = \frac{40\,000\,00\ + 3}{2 \bullet \pi} - \frac{40\,000\,000}{2 \bullet \pi} = \frac{40\,000\,003 - 40\,000\,000}{2 \bullet \pi} = \frac{3}{2 \bullet \pi} \approx\ 0{,}477$$

La distanza «d_3» della corda dall'equatore sarebbe, pertanto, di ≈0,5 m.

Qualcosa di simile

Per cercare di convincere i più scettici esaminiamo la seguente variante.

Immaginiamo di avvolgere un cubo, di cento metri di lato «L1 = 100 m», con una corda in modo che quest'ultima aderisca perfettamente alla superficie delle facce in ogni suo punto; la corda, pertanto sarà lunga pari al perimetro «c = 400 m» che caratterizza ciascuna delle sei facce del cubo (quadrato **nero**).



Prendiamo ora un'altra corda più lunga della precedente di un metro (ovvero C = 401 m) e disponiamola a quadrato attorno al cubo, tirandola uniformemente, in modo che i suoi lati risultino e paralleli ed alla stessa distanza dai lati del precedente quadrato (quadrato **rosso**).

Osservazioni

Nel disegno, le proporzioni non sono state rispettate

Il metro in più si distribuirà equamente lungo i quattro lati del nuovo quadrato per cui ogni suo lato avrà una lunghezza di «L_2 = 100,25 m)».

Ogni lato del quadrato **rosso** risulterà, pertanto, distanziato dal corrispettivo lato del quadrato **nero** della metà della differenza «$L_2 - L_1$ = 0,25 m», ovvero si avrà «d = 0,125 m», o parimenti «d = 12,5 cm», qualsiasi sia la lunghezza dei lati del quadrato **nero**.

Appendice «1r»

Un risultato inaspettato ripiegando un grande foglio di carta

Prefazione

Può capitare, e capita, di trovarci di fronte ad un risultato, oltre che inatteso, anche molto lontano da quanto avremmo previsto prima di esaminare più a fondo il problema.

Facciamo una prova

Prendete un foglio di carta dello spessore di «0,1 mm» e piegatelo in due sovrapponendo con cura le due parti; avete e dimezzato la superficie e raddoppiato lo spessore.

Piegatelo un'alta volta, sempre sovrapponendo con cura le due parti; ora il foglio di carta piegato ha uno spessore quattro volte maggiore del foglio singolo iniziale (trascuro la sua superficie perché in questo ragionamento non ha alcuna importanza).

Piegatelo una terza volta, sempre sovrapponendo con cura le due parti (sto diventando pedante?); ora il foglio ha uno spessore di ben «0,8 mm».

Sto facendo un poco di *melina* allo scopo di creare l'atmosfera più appropriata.

Infine vi domando: *quante volte pensate di dover piegare il foglio per ottenere uno spessore pari alla distanza media* **Terra-Luna**? (considerando la distanza media **Terra-Luna** pari a = 384 340 km).

Osservazioni

Per prevenire eventuali obiezioni, mi affretto a precisare che questo che vi sto chiedendo è semplicemente un esperimento mentale, impossibile da verificare in pratica, ma è e solamente e agevolmente calcolabile.

Quindi la mia domanda è lecita e la risposta è, forse, inattesa: *è sufficiente piegare il foglio soltanto* «42» *volte*!

Stupiti, increduli; calcoliamo quante piegature «N_1», di un foglio di «0,1 mm» di spessore, sono necessarie per raggiungere uno spessore di «384 340 km».

$$N_1 = \log_2 \frac{384\,340}{0{,}000\,000\,1}; \qquad N_1 = \log_2 3\,843\,400\,000\,000$$

(0,1 mm = 0,000 000 1 km)

$$N_1 = \log_2 3{,}843\,4 \bullet 10^{12} \approx 41{,}8\,.\,.\,.$$

Piegando il foglio «42» volte, pertanto, si raggiungerebbe uno spessore «S_1» di:

$$S_1 = 2^{42} = 439\,804{,}651\,.\,.\,.\ \text{km}$$

Superiore alla distanza media **Terra-Luna**.

Un'ultima domanda: *quante volte pensate di dover piegare il foglio per ottenere uno spessore pari alla distanza media* **Terra-Sole**? (considerando la distanza media **Terra-Sole** pari a = 149 600 000 km).

Calcoliamo anche quante piegature «N_2», di un foglio di «0,1 mm» di spessore, sono necessarie per raggiungere uno spessore di «149 500 000 km».

$$N_2 = \log_2 1{,}496 \bullet 10^{15} = 50{,}5\,.\,.\,.$$

Piegando il foglio «51» volte, pertanto si raggiungerebbe uno spessore «S_2» di:

$$S_2 = 2^{51} \bullet 0{,}000\,000\,1 = 225\,179\,981{,}368\,.\,.\,.\ \text{km}$$

Solo un poco meno del doppio della distanza **Terra-Sole**.

Le potenze sono una potenza . . . scusate mi è sfuggito un pensiero ad alta voce

Appendice «1s»

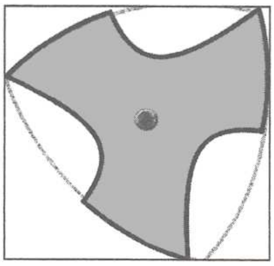
Eseguire un foro quadrato

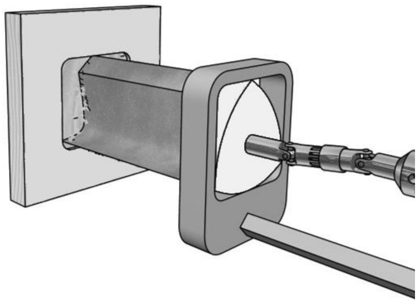
Premessa

Pochi, penso, si sono mai chiesti se sia possibile eseguire un foro quadrato utilizzando una *punta da trapano*; ancora meno, credo, sono coloro giunti alla conclusione che ciò è possibile.

Veniamo all’affermazione iniziale

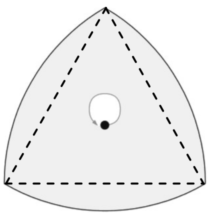
Utilizzando una punta di trapano a forma del ***triangolo di Reuleaux*** possiamo creare fori con sezione *quasi* perfettamente quadrata mediante rotazione eccentrica; la loro sezione è, infatti, solo leggermente arrotondata negli spigoli con una superficie di circa «0,987» dell'area del quadrato.



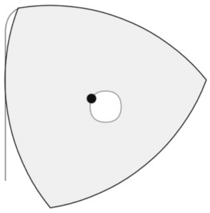


La sezione della punta vera e propria, quella che deve praticare il foro deve comunque avere una forma più elaborata di quella dal semplice triangolo di Reuleaux sia per renderla più idonea al compito che deve eseguire sia per alleggerirla senza precluderne la resistenza.

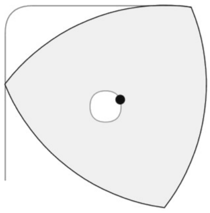
L’equipaggio mobile opportunamente sagomato, costituito dal ***triangolo di* Reuleaux**, dal nome dello scienziato tedesco **Franz Reuleaux** (1829 – 1905), viene posto in rotazione, all’interno di una sagoma quadrata, mediante uno snodo cardanico direttamente collegato al trapano.



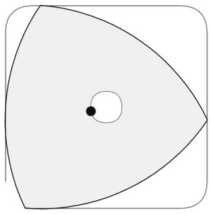
[fig. 1]



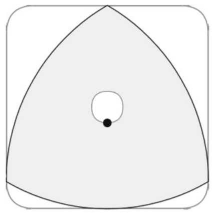
[fig. 2]



[fig. 3]



[fig. 4]



[fig. 5]

Il perimetro

Un triangolo equilatero può essere pensato come un sesto di esagono regolare, ne deriva che un lato del *triangolo di Reuleaux* equivale ad un sesto di circonferenza avente raggio «r» ed il suo perimetro è pari a tre sesti della misura della circonferenza di raggio «r»; considerato che quest'ultima è uguale a «2 • π • r», il perimetro del *triangolo di Reuleaux* sarà equivalente a «π • r».

L’area

L'area del *triangolo di Reuleaux* si calcola considerando che la figura è formata dal triangolo equilatero (tratteggiato nella [fig. 1]) e dalle tre rimanenti porzioni esterne.

L'area di queste ultime si calcola ricorrendo alla precedente figura dell'esagono inscritto in una circonferenza: esse risultano pari, pertanto, a metà del cerchio meno l'area di tre triangoli equilateri.

Di conseguenza, l'area del *triangolo di Releaux* «A» è pari a un mezzo dell'area del cerchio circoscritto all'esagono sottratta del doppio dell'area di un triangolo equilatero di lato «r»; si ottiene dunque:

$$A = \frac{r^2}{2} \bullet \left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

Questa figura gode di una proprietà particolare: possiede la minor area tra tutte le possibili curve ad ampiezza costante.

Inoltre

- Alcuni plettri per suonare o chitarra o il basso o il mandolino o altri strumenti a corda, hanno la forma caratteristica del *triangolo di Releaux*.
- il *triangolo di Reuleaux*, pressoché invariato nella forma, è anche la sezione del rotore nel *Motore rotativo Wankel* dal nome del suo inventore, il progettista tedesco **Felix Heinrich Wankel** (1902 – 1988).

Appendice «1t»

Un torneo di calcio

Prefazione

Ipotizziamo di volere organizzare un torneo di calcio, a girone unico (senza ritorno), per *cinque* squadre, presentate in ordine alfabetico:

Inter
Milan
Napoli
Juventus
Torino

Domande

a) Quante partite si devono disputare?
b) Quante giornate sono necessarie?
c) come potrebbe essere il calendario delle partite?

Risposte

a) Considerando «n = 5» squadre, il numero «P» delle partite da disputare è dato dalla formula:

$$P = \frac{n \bullet (n-1)}{2} \qquad \text{da cui: } P = \frac{5 \bullet (5-1)}{2} = \frac{5 \bullet 4}{2} = 10$$

Inter - Milan	Milan - Napoli	Napoli - Torino
Inter - Napoli	Milan - Juventus	Juventus - Torino
Inter - Juventus	Milan - Torino	
Inter - Torino	Napoli - Juventus	

b) Essendoci un numero dispari di squadre (n = 5), ogni giornata si potranno disputare solo alcune partite; una squadra, a turno, dovrà riposare.

Se «n» fosse un numero pari, indicando il numero delle squadre con «N» per distinguerlo dal nostro caso in cui il numero delle squadre era dispari, il numero «G» delle giornate previste sarebbe:

$$G = \frac{\frac{N \bullet (N-1)}{2}}{\frac{N}{2}} = \frac{N \bullet (N-1)}{2} \bullet \frac{2}{N} = N - 1$$

Le partite da giocare sarebbero $\frac{N \bullet (N-1)}{2}$ e in ogni giornata si disputerebbero $\frac{N}{2}$ partite.

Se, come nel nostro caso, «n» rappresenta un numero dispari di squadre, il numero «G» delle giornate previste sarebbe:

$$G = n$$

Se il numero delle squadre «N» è pari ed uguale a «n + 1», le giornate «G» in cui sono suddivise le partite, previste dal calendario, è dato, come abbiamo già visto, dalla seguente formula:

$$G = N - 1 \qquad \text{da cui: } G = N - 1 = 6 - 1 = 5$$

Se il numero delle squadre «n» è dispari, le giornate «G» in cui sono suddivise le partite, previste dal calendario, è dato, come abbiamo già visto, dalla seguente formula:

$$G = n \qquad \text{da cui: } G = 5$$

Osservazioni

Il numero delle giornate «G», in cui si devono disputare le partite, resterebbe sempre lo stesso e nel caso il numero delle squadre sia un numero dispari «n» e nel caso il numero delle squadre sia un numero pari «N», con «N = n + 1».

c) Per facilitarci il compito, aggiungiamo una squadra ***Fittizia*** (*Fictitious* in inglrse), portando il numero delle squadre ad un numero pari (N = n + 1 = 5 + 1 = 6); la squadra che dovrebbe giocare con quella *Fittizia*, riposerà.

Possiamo, pertanto, stabilire un calendario, ad esempio:

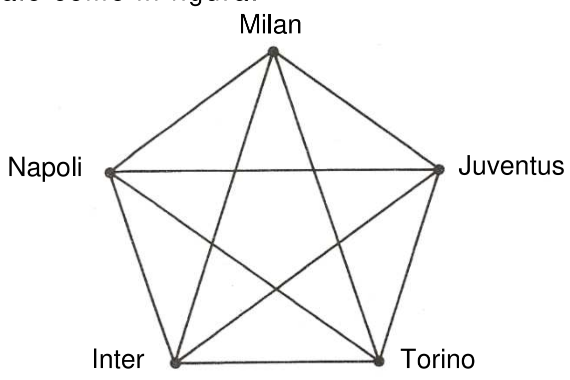
1° giornata	Napoli - Milan	Torino - - Juventus	Inter - *Fittizia*
2° giornata	Napoli - Juventus	Torino - Inter	Milan - *Fittizia*
3° giornata	Napoli - Torino	Inter - Milan	Juventus - *Fittizia*
4° giornata	Napoli - Inter	Milan - Juventus	Torino - *Fittizia*
5° giornata	Inter - Juventus	Torino - Milan	Napoli - *Fittizia*

Osservazioni

Nel caso il numero delle squadre fosse pari, non si dovrebbe aggiungere alcuna squadra *Fittizia* e le giornate e il numero delle giornate sarebbe dato da: G = n.

Elaborazione grafica

Se raffiguriamo ogni incontro del torneo con un segmento otteniamo un grafo pentagonale come in figura.



Gli «n» punti costituiscono i vertici di un poligono di «n» lati (nel nostro caso un *pentagono*); il numero di diagonali di tale poligono è:

$$D = \frac{n \bullet (n-3)}{2}$$

Anche gli n lati, parimenti, rappresentano un collegamento, per cui i collegamenti «C» sono:

$$C = \frac{n \bullet (n-3)}{2} + n = \frac{n \bullet (n-1)}{2}$$

Lo stesso valore trovato per le «n» squadre di calcio.

Appendice «1u»

Il SuperEnalotto

Prefazione

Il ***SuperEnalot to*** è un gioco d'azzardo numerico, a totalizzatore ed a premi, italiano, gestito dalla **SISAL**; dal 1º dicembre 1997, ha sostituito l'***Enalotto***.

È stato ideato da **Rodolfo Molo**, ex presidente **SISAL** e figlio di **Geo Molo**, che fu uno degli inventori del *Totocalcio*.

Il gioco

Il ***SuperEnalotto*** è un gioco nel quale un *concorrente* cerca di indovinare «6» numeri che vengono estratti su possibili «90».

Tutte le combinazioni hanno la stessa probabilità di comparire, anche se qualcuno persa, erroneamente, che, ad esempio, la serie «1 – 2 – 3 – 4 – 5 - 6» abbia meno probabilità di uscire della serie «21 – 33 – 47 – 68 - 81».

I giocatori devono semplicemente scegliere «6» numeri compresi tra «1» e «90».

Da un'urna che contiene «90» sfere identiche con dentro ciascuna un numero differente dall'«1» al «90», vengono estratte sei sfere ed i numeri presenti al loro interno divengono la sestina che i giocatore hanno cercato di indovinare.

Le probabilità di vincita

Se si dovessero indovinare i «6» numeri nella successione in cui vengono estratti, la probabilità di indovinare sarebbe «1» su «448 282 533 600», infatti:

$$a = 90 \bullet 89 \bullet 88 \bullet 87 \bullet 86 \bullet 85 = 448\,282\,533\,600$$

Per stabilire la vincita, per contro, interessano solo i numeri estratti e non la successione secondo la quale sono stati estratti; questo significa che ogni combinazione fra i «6» numeri ha lo stesso valore, ai fini della vincita.

Poiché vi sono esattamente «6!» (b = 6 • 5 • 4 • 3 • 2 • 1 = 720) disposizioni nella sequenza in cui possono essere estratti i sei numeri, il numero di tutti i casi possibili sono:

$$c = \frac{a}{b} = \frac{448\,282\,533\,600}{720} = 622\,614\,630$$

La probabilità di indovinare tutti i numeri della sestina è pertanto «1» su «622 614 630».

La stessa probabilità con cui «6» numeri possono essere indovinati componendo una sola colonna, può essere ricavata utilizzando un'altra procedura.

Ricordandoci che la:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$$

fornisce il numero di combinazioni di «n» *oggetti* presi a «k» a «k».

Da cui, risolvendo per «90» numeri presi a «6» a «6», si ha:

$$C_{90,6} = \binom{90}{6} = \frac{90!}{6! \bullet (90-6)!} = \frac{90!}{6! \bullet 84!} = 622\,614\,630$$

La probabilità di indovinare tutti i numeri della sestina è pertanto «1» su «622 614 630».

La stessa probabilità può essere ottenuta ricorrendo alle tecniche del calcolo combinatorio; risolvendo, si ha:

$$c = \frac{\binom{6}{6} \bullet \binom{84}{0}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{6! \bullet (6-6)!} \bullet \frac{84!}{0! \bullet (84-0)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{6! \bullet 0!} \bullet \frac{84!}{0! \bullet 84!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{1}{622\,614\,630}$$

Altre combinazioni vincenti

Con il ***SuperEnalotto*** non si vince solo indovinando la serie di sei numeri estratti, ma anche indovinandone meno di sei.

La probabilità di indovinare *due* numeri è:

$$c(2) = \frac{\binom{6}{2} \bullet \binom{84}{4}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{2! \bullet (6-2)!} \bullet \frac{84!}{4! \bullet (84-4)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{2! \bullet 4!} \bullet \frac{84!}{4! \bullet 80!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{28\,942\,515}{622\,614\,630} = 0{,}046\,485\,439\ldots \approx \frac{1}{22}$$

Osservazioni

Valore approssimato all 'unità.

Quella di individuarne *tre*:

$$c(3) = \frac{\binom{6}{3} \bullet \binom{84}{3}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{3! \bullet (6-3)!} \bullet \frac{84!}{3! \bullet (84-3)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{3! \bullet 3!} \bullet \frac{84!}{3! \bullet 81!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{1\,905\,680}{622\,614\,630} = 0{,}003\,060\ldots \approx \frac{1}{327}$$

Quella di individuarne *quattro*:

$$c(4) = \frac{\binom{6}{4} \bullet \binom{84}{2}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{4! \bullet (6-4)!} \bullet \frac{84!}{2! \bullet (84-2)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{4! \bullet 2!} \bullet \frac{84!}{2! \bullet 82!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{52\,290}{622\,614\,630} = 0{,}000\,083\,984\ldots \approx \frac{1}{11\,907}$$

Quella di individuarne *cinque*:

$$c(5) = \frac{\binom{6}{5} \bullet \binom{84}{1}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{5! \bullet (6-5)!} \bullet \frac{84!}{1! \bullet (84-1)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{5! \bullet 1!} \bullet \frac{84!}{1! \bullet 83!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{504}{622\,614\,630} = 0{,}000\,000\,809\,489\ldots \approx \frac{1}{1\,235\,346}$$

Viene estratto, dalla stessa urna, anche un numero **Jolly**; la probabilità di indovinare cinque numeri più il numero Jolly è data da:

$$c(5+1) = \frac{\binom{6}{5} \bullet \binom{84}{1} \bullet \binom{83}{0}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{5! \bullet (6-5)!} \bullet \frac{6!}{0! \bullet (6-0)!} \bullet \frac{83!}{0! \bullet (83-0)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{5! \bullet 1!} \bullet \frac{61}{0! \bullet 6!} \bullet \frac{83!}{0! \bullet 83!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{449}{622\,614\,630} = 0{,}000\,000\,009\,636\,779\ldots \approx \frac{1}{103\,769\,105}$$

Il SuperStar

Il gioco ***SuperStar*** è stato introdotto con il concorso del 28 marzo 2006 per offrire ulteriori possibilità di vincere dei premi.

Per partecipare i giocatori devono selezionare un numero compreso tra «1» e «90»; un numero *SuperStar* viene poi sorteggiato ad ogni estrazione del *SuperEnalotto*.

Poiché questo numero viene estratto da un'urna diversa da quella della sestina del SuperEnalotto, è possibile che lo stesso numero venga estratto sia nell'estrazione principale che in quella del SuperStar.

Considerando sia i «6» numeri della sestina sia il numero SuperStar, le combinazioni possibili sono, pertanto:

$$d = c \bullet 90 = 622\,614\,630 \bullet 90 = 56\,035\,316\,700$$

La probabilità di indovinare tutti i numeri della sestina contemporaneamente al numero SuperStar è pertanto «1» su «56 035 316 700».

Giocare il numero SuperStar è facoltativo.

Curiosità

La probabilità di non indovinare neanche uno dei «6» numeri è:

$$c(0) = \frac{\binom{6}{0} \bullet \binom{84}{6}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{0! \bullet (6-0)!} \bullet \frac{84!}{6! \bullet (84-6)!}}{\frac{90!}{6! \bullet (90-6)!}} = \frac{\frac{6!}{0! \bullet 6!} \bullet \frac{84!}{6! \bullet 78!}}{\frac{90!}{6! \bullet 84!}} = \frac{406\,481\,544}{622\,614\,630} = 0{,}652\,862\ldots \approx \frac{1}{1{,}53}$$

Sommando le probabilità di vincita di ciascuna categoria, si ottiene che la probabilità di vincere almeno un premio di qualunque categoria è di circa 1 su 20. Infatti:

$$\frac{1}{22} + \frac{1}{327} + \frac{1}{11\,907} + \frac{1}{1\,235\,346} + \frac{1}{103\,769\,105} + \frac{1}{622\,614\,630} = 0{,}048\,597\,454\ldots \approx \frac{1}{20{,}6}$$

Il primo *sei* fu indovinato il 17 gennaio 1998 a **Poncarale**, in provincia di **Brescia**, e valse «11 807 025 000 lire».

Una particolare vincita si ebbe il 31 ottobre 1998 a **Peschici**, in provincia di **Foggia**: *cento* persone giocarono un sistema vincendo «63» miliardi di lire.

La più alta vincita mai realizzata è stata di «209 106 441,54 €», centrata a **Lodi** il 13 agosto 2019, con una schedina da «2 €».

La seconda singola vincita più alta è stata di «163 538 706,00 €», vinti il 27 ottobre 2016 a **Vibo Valentia**, con una schedina da appena «3 €»; oltre alla sestina vincente, il fortunato giocatore ha azzeccato anche il numero *Superstar* , ottenendo, un ulteriore bonus di «2 000 000 €», portando di fatto la vincita finale a «165 538 706,00 €».

Il SuperEnalotto, fino al 1 novembre 2021, detiene il primato della più alta vincita mai aggiudicata a una sola persona in **Europa**.

Appendice «1v»

Il problema di Basilea

Prefazione

Il ***problema di Basilea*** fu posto per la prima volta dal matematico italiano **Pietro Mengoli** (1626 – 1686) e consisteva nel riuscire a determinare il valore a cui tende la somma degli inversi di tutti i quadrati dei numeri naturali, cioè la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\ldots$$

La soluzione arrivò nei 1735 per merito di **Eulero** (per maggiori informazioni su Eulero vedi **Identita di Eulero** in *Le formule più belle*, a pagina 54)

$$\zeta_2=1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

Una volta risolto il problema di Basilea, Eulero ottenne le soluzioni per altre serie di potenze pari:

$$\zeta_4=1+\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta_6=1+\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}\ldots=\frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta_8=1+\frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}\ldots=\frac{\pi^8}{9\,450}$$

$$\zeta_{10}=1+\frac{1}{1^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}\ldots=\frac{\pi^{10}}{93\,555}$$

Nel 1739, ottenne un'espressione generale per le serie:

$$\zeta_{2n}=(-1)^{n+1}\bullet\frac{(2\bullet\pi)^{2\bullet n}\bullet B_{2n}}{2\bullet(2\bullet n)!}$$

In cui: «B_{2n}» sono i ***numeri di Bernoulli***.

Per «x = 1», si ha la serie armonica divergente:

$$\zeta_1=1+\frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{5^1}+\frac{1}{6^1}+\ldots=\infty$$

Per «x = 2», si ha la serie del problema di Basilea:

$$\zeta_2=1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ \ldots 1{,}644\,934\,066\,848\,226\,436\,472\ldots$$

Per «x = 3», si ha la serie che fornisce il numero irrazionale noto come la ***costante di Apéry***; **Roger Apéry** (1916 – 1994) è stato un matematico francese,

$$\zeta_3=1+\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}\ldots=1{,}202\,056\,903\,159\,594\,285\,39\ldots$$

Altre serie interessanti

La serie di Mengoli

La ***serie di Mengoni***, dal matematico italiano **Pietro Mengoni** (1626 – 1686) è una serie convergente, è un particolare tipo di *serie telescopoca*.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots=1$$

La serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^a}=\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\ldots \text{ con } a\in\mathbb{R}$$

Tale serie diverge per «a ≤ 1» e converge per «a > 1»

La serie di Kempner

La ***serie di Kempner***, studiata per la prima volta dal matematico statunitense di origine inglese **A. J. Kempner** (1880 – 1973) nel 1914, è una variante della serie armonica, costruita omettendo tutti i termini il cui denominatore contiene la cifra «9», espressa in base decimale:

$$\sum_{n=1}^{\prime\infty}\frac{1}{n}$$

Questa serie è interessante poiché il suo risultato *controintuitivo*, a differenza di quello della *serie armonica*, è convergente.

Kempner mostrò che il valore di questa serie è minore di «80».

Thomas Schmelzer e **Robert Baillie** dimostrarono che, arrotondata alla 20ª cifra decimale, la somma reale è: 22,920 676 619 264 150 348 16.

Appendice «1z»

I numeri pluriunitari

Premessa

I ***numeri pluriunitari*** , chiamati anche ***repunit*** (dall'inglese *Repeated unit*) sono numeri formati dalla sola cifra «1», ripetuta quante volte si vuole; un numero *pluriunitario* di «n» si indica col simbolo «Rn».

Sono, pertanto, *numeri pluriunitari*: $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$, . . .

Esistono numeri *pluriunitari primi* e quanti sono?

Prima del 1918 si riteneva che il numero «11» fosse l'unico numero *pluriunitario* primo, come affermava, nel suo libro di indovinelli (The Canterbury Puzzles, 1907), l'esperto inglese di enigmistica **Henry Ernest Dudeney** (1857 – 1930).

Nel 1916, **Oscar Hoppe** dimostrò che R_{19}» (numero *pluriunitario* composto da diciannove cifre «1») è primo; nel 1923, il matematico statunitense **Derrick Norman Lehmer** (1867 – 1938) ed il matematico belga **Maurice Borisovich Kraitchik** (1882 – 1957), indipendentemente, dimostrarono che anche R_{23}» è primo.

Con l'evento dei calcolatori elettronici sono stati trovati come primi: R_{317}», «R_{1031}»; sono, per contro, ancora sotto indagine i probabili primi: «R_{49081}», «R_{86453}», «R_{109297}», «R_{270343}», «$R_{5794777}$», «$R_{8177207}$».

Si congettura che esistano infiniti *numeri pluriunitari* che siano anche *numeri primi*.

Può un numero *pluriunitario* essere un quadrato perfetto?

Un qualunque numero dispari elevato al quadrato e diviso per «4» dà resto «1»; basta osservare che:

$$(2 \bullet n + 1)^2 = 4 \bullet n^2 + 4 \bullet n + 1$$

Se si esclude R_1 (cioè 1), dividendo un qualsiasi *numero pluriunitario* «Rn» per «4» si ha resto «3»; per averne conferma, basta isolare le ultime due cifre e, poi, dividere per «4».

Esempio: dividendo per «4» il *numero pluriunitario* $\mathbf{R_5}$ ***= 11111 = 11100*** **+ 11**; il primo termine, multiplo di 100, non fornisce alcun contributo al resto, che è quindi determinato dal secondo termine, «11».

Il resto di «11» diviso «4» è pari a «3».

Appendice «2a»

Gli assiomi

Prefazione

In matematica, per definire proprietà ed indimostrate ed assunte come vere, si utilizzano termini come od ***assioma*** o ***postulato***.

L'***assioma*** è o un enunciato o una preposizione matematica considerato come vera senza essere stata dimostrata; gi assiomi, fondamenti di ogni teoria, devono essere fra loro ed indipendenti e non contradditori ed in numero finito.

In ambito geometrico è preferibile utilizzare il termine ***postulato*** anche se ha lo stesso significato di *assioma*.

In fisica si ricorre preferibilmente al termine ***principio*** per indicare un *assioma*.

Assiomi di Peano

Gli ***assiomi di Peano*** sono un gruppo di cinque assiomi introdotti dal e matematico e logico e glottoteta italiano **Giuseppe Peano** (1858 – 1932) con lo scopo di definire, assiomaticamente, l'insieme dei numeri naturali.

Precisazioni

É detto ***glottoteta*** o ***glossopoeta*** colui che crea linguaggi artificiali o per unire i popoli semplificandone i metodi di comunicazione o per progettare una nuova lingua perché possa essere inserita all'interno di un'opera artistica.

La **glossopoiesi** è l'arte di creare linguaggi artificiali sviluppandone e la fonologia ed il vocabolario e la grammatica, sia essa o artistica o ausiliaria o logica o filosofica.

1) lo *zero* «0» è un numero naturale.
2) per ogni numero naturale «n» esiste un suo successore.
3) lo zero «» non è il successore di alcun numero naturale.
4) numeri diversi hanno successori diversi.
5) noto con il nome di *Principio di induzione* è uno strumento molto usato nelle dimostrazioni: l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è il più piccolo insieme e che contenga lo «0» e che contenga il successore di ogni suo elemento.

Assioma di Dedekind

l'***assioma di Dedekind***, detto anche *assioma di continuità* oppure *assioma di completezza* [**Julius Wilhelm Richard Dedekind** (1831 – 1916) è stato un matematico tedesco] riguarda l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$; esso afferma: *ogni insieme «S» di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore, vale a dire un numero reale uguale o maggiore di tutti gli elementi di «S» e tale che non esista nessun reale più piccolo con tale proprietà*.

Assiomi della teoria delle probabilità

La teoria delle probabilità si basa sui seguenti tre assiomi.

1) la probabilità «p» di un evento è un numero unico sia o maggiore od uguale a «0» sia o minore od uguale ad «1» ($0 \leq p \leq 1$).
2) la probabilità di un evento certo è sempre «$p = 1$».
3) la probabilità di due eventi incompatibili è la somma delle loro probabilita.

Assioma dell'insieme vuoto

Esiste un insieme privo di elementi, detto ***insieme vuoto*** e denotato col simbolo { }.

Il principio in matematica

Principio di Cavalieri

Il ***principio di Cavalieri*** [**Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598 – 1647) è stato un e matematico e accademico italiano] afferma: *se due solidi di uguale altezza possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli alla base, ciascun piano individua sui due solidi due o sezioni equivalenti* (con la stessa area) o sezioni che stanno sempre in un dato rapporto, *allora i due solidi o sono equivalenti* (hanno ugual volume) o *staranno in questo stesso rapporto*.

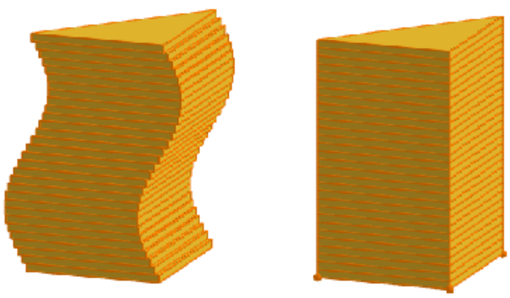
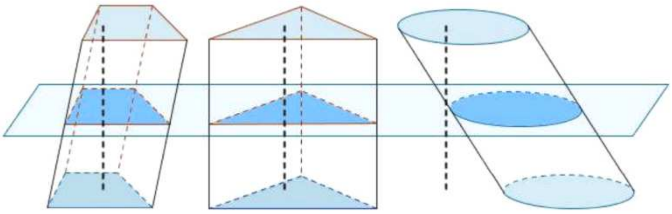


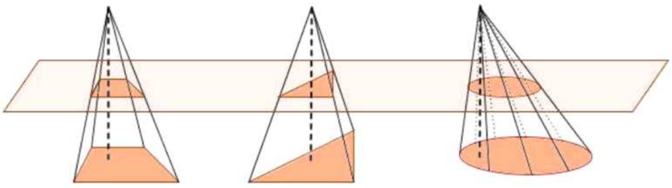
Figura uploaded by **Luca Goldoni**

Teorema 1: due prismi, o un prisma e un cilindro, o due cilindri, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.



Un prisma è dunque, in particolare, equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del prisma.

Teorema 2: due piramidi, o una piramide e un cono, o due coni, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.



E anche un cilindro è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del cilindro.

Il principio del terzo escluso

Il ***principio del terzo escluso*** (detto anche principio o del ***medio escluso*** o del ***mezzo escluso***) afferma: due proposizioni formati da una coppia antifatica (x e –x) devono avere valore di verità opposto, non essendoci una terza possibilità oltre queste due (tertium no datur = *Una terza cosa non è data*).

Il principio di identità per i polinomi

Il ***principio di identità per i polinomi*** afferma: due polinomi, ridotti in forma normale, sono identici, se e soltanto, se hanno e lo stesso grado ed i coefficienti dei termini dello stesso grado sono uguali.

Il primo principio di equivalenza

Il primo principio di equivalenza afferma: o sommando o sottraendo la stessa quantità da entrambi i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente alla data (che ha la stessa soluzione).

I) **corollario**

La ***regola della cancellazione***: se uno stesso termine figura in entrambi i membri di un'equazione, esso può essere soppresso

II) **corollario**

La ***regola del trasporto*****:** si può sempre trasportare un termine di un'equazione da un membro all'altro purché gli si cambi di segno**.**

Il secondo principio di equivalenza

Il ***secondo principio di equivalenza*** afferma: o moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione o per uno stesso numero diverso da zero o per una stessa espressione che non possa annullarsi, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Appendice «2b»

Il numero dei pezzi nei puzzle

Prefazione

Il numero dei pezzi di cui è composto un puzzle è sempre indicato nella confezione: 500, 1 000, 2 000, 3 000, 5 000, 8 000, ma questa informazione è sempre vera o i produttori qualche volta mentono? (diciamo che non forniscono il numero esatto, anche se alcuni di loro forniscono questo dettaglio nel foglio esplicativo).

Tutti i puzzle sono rettangolari parimenti ai loro pezzi che, per quanto differenti, sono ritagliati da una base rettangolare sulla quale sono state impresse le linee di scomposizione.

Per sviluppare un puzzle di «2 000 pezzi» occorre che due numeri interi, uno per ogni angolo del rettangolo, moltiplicati fra loro diano come risultato il valore «2 000»; le opzioni sono soltanto nove.

$$1 \bullet 2\,000 = 2 \bullet 1\,000 = 4 \bullet 500 = 8 \bullet 250 = 10 \bullet 200 = 16 \bullet 125 = 20 \bullet 100 = 25 \bullet 80 = 40 \bullet 50$$

Le misure di un puzzle ed in particolare il rapporto fra la sua lunghezza e la sua larghezza deve essere tale da condurre ad una distribuzione rettangolare equilibrata, da risultare non spiacevole alla vista.

Il puzzle completato, pertanto, non deve avere l'aspetto né di un *nastro* né di un *quadrato*, ma deve essere simile ad un foglio di formato DIN nel quale il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è pari a ≈1,41.

Il motivo

I rettangoli che si otterrebbero con «2 000 pezzi» sono, purtroppo, o troppo quadrati o troppo allungati, infatti:

$\frac{50}{40} = 1{,}25$ troppo quadrato $\qquad$ $\frac{80}{25} = 3{,}20$ troppo allungato

Per questa ragione, i puzzle che sono indicati come di «2 000 pezzi» ne hanno in effetti, solitamente, soltanto «1 998».

Per comprenderne il motivo, scomponiamo il numero «1 998» in fattori primi ed andiamo a verificare quale prodotto di due dei suoi divisori fornisca un rettangolo il cui formato si avvicini a quello desiderato (al formato DIN).

$$1\,998 = 2 \bullet 3^3 \bullet 37 \Rightarrow \frac{2 \bullet 3^3}{37} = \frac{54}{37} \approx 1{,}46$$

Con un rapporto molto prossimo a quello del formato DIN.

Appendice «2c»

Le dimensioni dello schermo di un televisore

Prefazione

Le dimensioni di un televisore vengono fornite in pollici (unità anglosassone) riferendosi alla lunghezza della diagonale dello schermo.

1” = 2,5 cm

Nella maggior parte degli stati europei, per contro, è adottato il Sistema Metrico Decimale, pertanto, a molti europei potrebbe risultare difficile conoscere le reali dimensioni del televisore che si apprestano a comprare.

Risolviamo il problema

Calcoliamone le dimensioni, in termini più comprensibili, conoscendo e le dimensioni della diagonale dello schermo in pollici e la relazione fra i suoi lati.

Lo schermo di un televisore e di «32”» e di formato «16:9» ha una diagonale di:

$$32 \bullet 2,5 = 81,28 \text{ cm}$$

Le dimensioni dei suoi lati sono, pertanto, e «16a» e «9a».

Per calcolare il valore di «a» si può utilizzare uno dei teoremi più antichi della storia: il teorema di Pitagora.

$(16a)^2 + (9a)^2 = 81,28^2$
$81a^2 + 256a^2 = 337a^2$
$337a^2 \approx 6\,606,4384$
$a^2 = {}^{6\,606,4384}/_{337} \approx 19,6037$
$a = \sqrt{}19,6037 = 4,43$ cm

Da cui si ha.

Lato maggiore: $16 \bullet 4,43 = 71$ cm
Lato minore: $9 \bullet 4,43 = 40$ cm

Il medesimo calcolo ci consente di conoscere le dimensioni dello schermo di «32”», nel vecchio formato «4:3».

Lato maggiore: 65 cm
Lato minore: 49 cm

Appendice «2d»

Un problema molto difficile ed una soluzione molto semplice

Prefazione

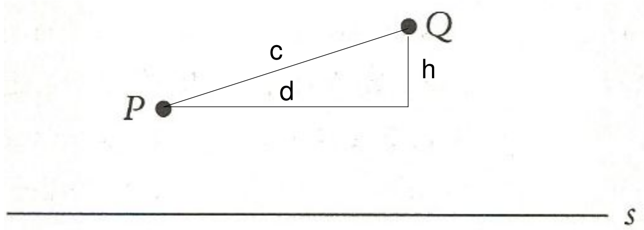
Capita, alcune volte, che un problema apparentemente complesso si possa risolvere in maniera e semplice ed elegante, seguendo un'intuizione ingegnosa.

Diamo appresso un esempio significativo della nostra affermazione.

Il problema

Consideriamo una retta «s» e due punti, e «P» e «Q», ad una distanza conosciuta sia fra loro «c» sia da ognuno dei due dalla retta «s», rispettivamente ed «a» e «b»; il valore di «d», anche se si può calcolare, non è ancora conosciuto.

fig. 1



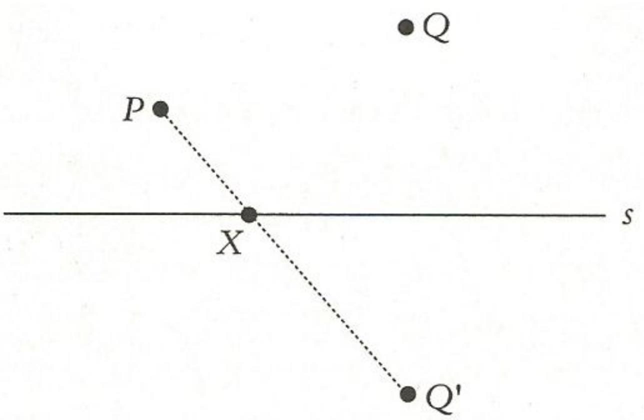
Si chiede di tracciare un percorso, composto da due segmenti, che da «P» vada a «Q», passando per un punto «X», posto in «s», in modo che il percorso «P X Q» sia il più breve.

A prima vista potrebbe sembrare un compito alquanto arduo quello di provare, fra le infinite possibilità, quella che risolve il problema; ecco, per contro, palesarsi un'idea geniale.

Immaginiamo il segmento «s» come uno specchio; tracciamo, quindi, il riflesso di «Q» rispetto ad esso e chiamiamo «Q'» questo punto.

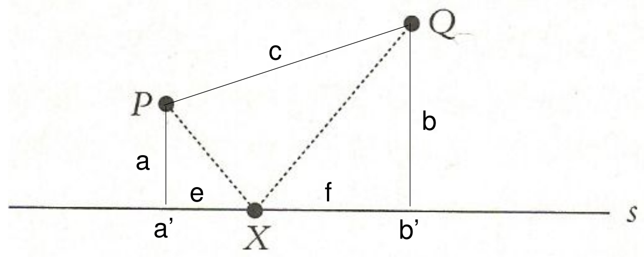
Tracciamo il segmento che unisce «P» con «Q'»; questo segmento, che interseca il segmento «s» nel punto «X», determina il tragitto più breve tra «P» e «Q'», mentre il punto «X», intersezione del segmento «P Q'» col segmento «s», indica il punto «X» che deve toccare il percorso P X Q' per essere il più breve.

fig. 2



Basandoci sempre sulla simmetria, riflettiamo nuovamente il segmento «X Q'» nello *specchio* «s» ottenendo la [fig. 3] nella quale è evidente che il segmento «X Q» ha la stessa lunghezza del segmento «X Q'» e, pertanto, la linea tratteggiata «P X Q» ha la stessa lunghezza del segmento «P Q'».

fig. 3



Se il segmento «P Q'» è il tragitto più breve fra «P» e «Q'» (è la distanza) lo è anche il tragitto «P X Q»; il punto «X» è quello, posto in «s», che risolve il problema.

Una volta e svelato il *trucco* e compreso il ragionamento determinante, la risoluzione matematica risulta oltremodo semplice.

Risoluzione analitica

Rifacendoci ed alla [fig. 1] ed alla [fig. 3] calcoliamo subito il valore e di «h» e di «d».

$h = b - a$

$d = \sqrt{b^2 - a^2}$

A ragione del metodo di costruzione i triangoli e «P a' X» e «X b' Q» sono simili, pertanto si può scrivere:

$a : b = e : f$

$(a + b) : a = (e + f) : e \qquad (a + b) : a = (d) : e \qquad e = \frac{a \bullet d}{a + b}$

$(a + b) : b = (e + f) : f \qquad (a + b) : b = (d) : f \qquad f = \frac{b \bullet d}{a + b} \qquad (f = d - e)$

Risoluzione numerica

Consideriamo i seguenti valori:

a = 3,1 cm
b = 5,6 cm
c = 7,4 cm
d = e + f cm

Svolgiamo i calcoli.

$h = 5{,}6 - 3{,}1$

$d = \sqrt{5{,}6^2 - 3{,}1^2} \qquad d = \sqrt{31{,}36^2 - 9{,}61^2} \qquad d = \sqrt{21{,}75} \qquad d = 4{,}66$

A ragione del metodo di costruzione i triangoli e «P a' X» e «X b' Q» sono simili, pertanto si può scrivere:

$3{,}1 : 5{,}6 = e : f$

$(3{,}1 + 5{,}6) : 3{,}1 = d : e \qquad 8{,}7 : 3{,}1 = 4{,}66 : e \qquad e = \frac{3{,}1 \bullet 4{,}66}{8{,}7} = 1{,}66$

$(3{,}1 + 5{,}6) : 5{,}6 = d : f \qquad 8{,}7 : 5{,}6 = 4{,}66 : f \qquad f = \frac{5{,}6 \bullet 4{,}66}{8{,}7} = 3{,}00$

d = e + f = 1,66 + 3,00 = 4,66 cm

Appendice «2e»

Il teorema di Varignon

Premessa

Quello di Varignon è un celebre teorema di geometria piana caratterizzato da un sorprendente risultato; comparve per la prima volta nel libro ***Projet d'une nouvelle mécanique, avec un exposé de l'opinion de M. Borelli sur les propriétez des poids***, pubblicato nel 1682.

Pierre Varignon (1654 – 1722) è stato ed un matematico ed un presbitero francese.

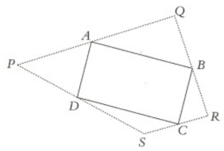
Analizziamolo

Si scelgono quattro punti arbitrari nel piano: *P*, *Q*, *R*, *S*, e si uniscono con dei segmenti consecutivi in modo da formare un quadrilatero.

Si individuano, poi, i punti mediani dei quattro lati: *A*, *B*, *C*, *D*, e si uniscono per formare un altro quadrilatero interno al primo.

Se si ripetesse lo stesso processo con altri quattro punti qualsiasi, si arriverebbe alla stessa medesima situazione per quanto il quadrilatero iniziale sia e particolare ed insolito.

Dalla [fig. 1] e dalle altre esperiene e da tutti i risultati possiamo, pertanto, formulare una definizione generale.



[fig. 01]

Il quadrilatero con i vertici nei punti medi di un altro quadrilatero è un ***parallelogramma***.

Cerchiamo di spiegare il motivo iniziando ad analizzare due dimostrazioni, una vettoriale l'altra geometrica.

Dimostrazione vettoriale

Dire che i punti: *A*, *B*, *C*, *D*, posti nel punto medio dei lati del quadrilatero «*PQRS*» determinano un parallelogramma equivale a dire che sia i vettori e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sia i vettori e $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ sono uguali, Hanno, pertanto, le stesse componenti.

Sapendo che: $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$, $S(s_1, s_2)$, possiamo trovare sia le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ che risultano identiche a quelle del vettore $\overrightarrow{DC}$ sia le componenti del vettore $\overrightarrow{AD}$ che risultano identiche a quelle del vettore $\overrightarrow{BC}$.

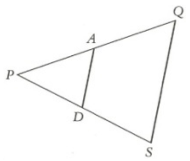
$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{r_1 - p_1}{2}, \frac{r_1 - p_2}{2}\right) = \overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AD} = \left(\frac{s_1 - q_1}{2}, \frac{s_1 - q_2}{2}\right) = \overrightarrow{BC}$$

Da cui si evince che le coppie di segmenti e «*AB*, *DC*» e «*AD*, *BC*» sono e paralleli ed uguali fra loro.

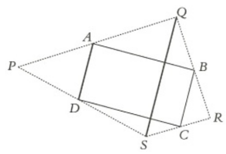
Con questo abbiamo si dimostrato il teorema, ma, purtroppo, non lo abbiamo spiegato; spesso la logica dimostra, ma non spiega.

Dimostrazione geometrica

Concentriamoci su una parte della [fig. 1] e riportiamola in [fig. 2].



[fig. 2]

[fig. 3]


Possiamo individuare due triangoli simili e «*APD*» e «*QPS*»; dal momento che i punti ed «*A*» e «*B*» sono stat scelti rispettivamente nei punti medi dei lati e «*PQ*» e «*PS*» e che il triangolo «*APD*» si trova all'interno del triangolo «*QPS*», con vertice «*P*» in comune, il segmento «*AD*» è sicuramente parallelo al segmento «*QS*».

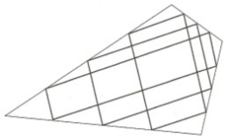
Prendendo ora in considerazione i triangoli e «*BCR*» e «*QSR*», con vertice «*R*» in comune, con un ragionamento analogo al precedente, possiamo affermare che anche il segmento «*BC*» è parallelo al segmento «*QS*».

Poiché i segmenti e «*AD*» e «*BC*» sono entrambi paralleli al segmento «*QS*» sono, anche, paralleli fra loro.

Allo stesso modo, prendendo in esame prima i triangoli e «*ABQ*» e «*PRQ*» poi i triangoli e «*DSC*» e «*PSR*», possiamo dimostrare ce ance i segmenti e «*AB*» e «*DC*» sono paralleli; il quadrilatero «*ABCD*» è, pertanto, un parallelogramma.

A questo punto potrebbe sorgere un dubbio: se invece di considerare i punti medi dividessimo i lati od in tre od in quattro od in più parti? Proviamoci.

[fig. 4]



Anche in tutti questi casi, seguendo il teorema di Varignon, si ottengono sempre dei parallelogrammi.

Appendice «2f»

Calendario perpetuo

Premessa

Il **calendario perpetuo** è un metodo che permette di ricavare il giorno della settimana (*lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica*) di una qualsiasi data del calendario.

Il calcolo per le date e prima del *giovedì 4 ottobre 1582* e quello dopo il *venerdì 15 ottobre 1582*, deve seguire due procedimenti differenti in quanto le prime seguono il calendario Giuliano, mentre le seconde seguono il calendario Gregoriano.

L'aritmetica modulare

Si definisce ***aritmetica modulare*** un'aritmetica che opera su un insieme limitato di numeri, di solito un sottoinsieme di «$\mathbb{N}$» escludendo i negativi; potrebbe anche chiamarsi *aritmetica circolare*, in quanto una volta raggiunto l'ultimo numero si ricomincia dal primo.

L'aritmetica modulare, e la notazione usuale delle congruenze, vennero formalmente introdotte dal e matematico ed astronomo e fisico tedesco **Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855) nel suo trattato *Disquisitiones Arithmeticae*, pubblicato nel 1801.

Calendario gregoriano

Per i giorni che vanno dal *venerdì 15 ottobre 1582*, primo giorno del calendario gregoriano fino a noi ed oltre.

Considerando una data [gg/mm/ssaa] le sue componenti son descritte nella seguente tabella.

Il numero	**Corrisponde a**	**Limitazioni**
gg	giorno del mese	1 ÷ 31
mm	mese dell'anno	1 ÷ 12
ss	prime due cifre dell'anno [int(anno/100)]	ss ≥ 15
aa	ultime due cifre dell'anno [anno mod 100]	0 ÷ 99

L'algoritmo per ricavare il giorno della settimana, conoscendo ed il giorno del mese ed il mese e l'anno, consiste nel determinare cinque addendi: G, M, S, A, B, e nel calcolare, poi, il valore dell'espressione [(G + M + S + A + B) mod 7].

Precisazioni

Addèndo: dal latino *addendum*, gerundio neutro di *addere*, ***aggiungere***; ciascuno degli elementi sui quali si esegue l'operazione di addizione.

- «G» = gg mod 7
- «M» è un codice numerico derivato dal mese, fornito dalla [tabella n° 01].

Mese	**M** **anno non bisestile**	**M** **anno bisestile**
Gennaio	6	5
Febbraio	2	1
Marzo	2	
Aprile	5	
Maggio	0	
Giugno	3	
Luglio	5	
Agosto	1	
Settembre	4	
Ottobre	6	
Novembre	2	
Dicembre	4	

[tabella n° 01]

- «S» è un codice numerico derivato dal secolo, ovvero dalle prime due cifre «ss» dell'anno; ai quattro possibili risultati dell'espressione [ss mod 4] si deve associare il numero «S» ricavato dalla [tabella n° 02a].

ss mod 4	0	1	2	3
S	0	5	3	1

[tabella n° 02a]

Per i primi secoli, per contro, si deve utilizzare la [tabella n° 02b]

ss	15	16	17	18	19	20	21	22	23
S	1	0	5	3	1	0	5	3	1

[tabella n° 02b]

- «A» = aa mod 28

Poiché, e nel calendario gregoriano e nell'ambito del medesimo secolo, i giorni della settimana si ripetono ogni 28 anni.

- «B» = int[(aa mod 28) / 4]

Determinati i cinque addendi, si calcola:

R = [(G + M + S + A + B) mod 7]

La formula fornisce un numero compreso fra «0 ÷ 6» al quale è associato un giorno della settimana, nella [tabella n° 03].

Risultato	Giorno
0	Domenica
1	Lunedì
2	Martedì
3	Mercoledì
4	Giovedì
5	Venerdì
6	Sabato

[tabella n° 03]

Calendario giuliano

Per i giorni del calendario giuliano che vanno dall'anno «1 d.C.» fino a *giovedì 4 ottobre 1582*, ultimo giorno in cui tale calendario è rimasto in vigore, si può usare un algoritmo simile al precedente per conoscere il giorno della settimana corrispondente.

Osservazioni

Il lettore accorto si sarà reso conto di quello che potrebbe sembrare od un errore od una banale svista sulle date.

Il ***calendario giuliano*** termina il *giovedì 4 ottobre 1582*, mentre il ***calendario gregoriano*** inizia il *venerdì 15 ottobre 1582*.

Nessun abbaglio, i giorni che vanno dal «5 ottobre 1582» al «14 ottobre 1582» compresi, semplicemente non esistono; non esiste, pertanto neanche alcuna corrispondenza fra il numero ordinale del giorno ed il giorno della settimana.

Se domandate ad un *calcolatore umano*, ma anche ad un calcolatore online, quale giorno della settimana era il *9 ottobre 1582*, non potrà rispondervi.

Considerando una data [gg/mm/ssaa] le sue componenti son descritte nella seguente tabella.

Il numero	Corrisponde a	Limitazioni
gg	giorno del mese	1 ÷ 31
mm	mese dell'anno	1 ÷ 12
ss	prime due cifre dell'anno [int(anno/100)]	0 ÷ 15
aa	ultime due cifre dell'anno [anno mod 100]	0 ÷ 99

L'algoritmo per ricavare il giorno della settimana, conoscendo ed il giorno del mese ed il mese e l'anno, consiste nel determinare cinque addendi: G, M, S, A, B, e nel calcolare, poi, il valore dell'espressione [(G + M + S + A + B) mod 7].

- «G» = gg mod 7

- «M» è un codice numerico derivato dal mese, fornito dalla [tabella n° 11].

<table>
<tr><th>Mese</th><th>M
anno non bisestile</th><th>M
anno bisestile</th></tr>
<tr><td>Gennaio</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Febbraio</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Marzo</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Aprile</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>Maggio</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>Giugno</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Luglio</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>Agosto</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>Settembre</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Ottobre</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Novembre</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Dicembre</td><td colspan="2">3</td></tr>
</table>

[tabella n° 11]

- «S» = 6 - (ss mod 7)

Per i primi secoli, per contro, si può utilizzare la [tabella n° 12]

ss	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
S	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5

[tabella n° 12]

- «A» = aa mod 28

Poiché, e nel calendario giuliano e nell'ambito del medesimo secolo, i giorni della settimana si ripetono ogni 28 anni.

- «B» = int[(aa mod 28) / 4]

Determinati i cinque addendi, si calcola:

R = [(G + M + S + A + B) mod 7]

La formula fornisce un numero compreso fra «0 ÷ 6» al quale è associato un giorno della settimana, nella [tabella n° 13].

Risultato	Giorno
0	Domenica
1	Lunedì
2	Martedì
3	Mercoledì
4	Giovedì
5	Venerdì
6	Sabato

[tabella n° 13]

Esempi col calendario giuliano

Data: 4 ottobre 1582 (04/10/1582); (ultimo giorno di validità del calendario giuliano.

G = 4 [(gg = 4), 4 mod 7 = 4]
M = 5 (ottobre) [tabella n° 11]
S = 5 [(ss = 15)] [tabella n° 12]
A = 26 [(aa = 52), 82 mod 28 = 26]
B = 6 {int[(82 mod 28) / 4] = int(26 / 4) = 6}

R = G + M + S + A + B = 4 + 5 + 5 + 26 + 6 = 46
46 mod 7 = 4
Giovedì [tabella n° 13]

Il giorno 4 ottobre 1852 era un ***giovedì***

Data: 15 febbraio 1564 (15/02/1564); data di nascita di Galileo Galilei.

G = 1 [(gg = 15), 15 mod 7 = 1]
M = 0 (febbraio) [tabella n° 0] [anno bisestile]
S = 5 [(ss = 15)] [tabella n° 12]
A = 8 [(aa = 64), 64 mod 28 = 8]
B = 2 {int[(64 mod 28) / 4] = int(8 / 4) = 2}
R = G + m + S + A + B = 1 + 0 + 5 + 8 + 2 = 16
16 mod 7 = 2
Martedì [tabella n° 13]

Il giorno 15 febbraio 1564 era un ***martedì*** (giorno di nascita di Galileo Galilei)

Esempi col calendario gregoriano

Data: 15 ottobre 1582 (15/10/1582); primo giorno di validità del calendario gregoriano.

G = 1 [(gg = 15), 15 mod 7 = 1]
M = 6 (ottobre) [tabella n° 1]
S = 1 [(ss = 15), 15 mod 4 = 3] [tabella n° 2a]
A = 26 [(aa = 82), 82 mod 28 = 26]
B = 6 {int[(82 mod 28) / 4] = int(26 / 4) = 6}
R = G + m + S + A + B = 1 + 6 + 1 + 26 + 6 = 40
40 mod 7 = 5
Venerdì [tabella n° 3]

Il giorno 15 ottobre 1582 era un ***venerdì***

Data: 01 luglio 1948 (01/07/1948); data di nascita dell’Autore.

G = 1 [(gg = 1), 1 mod 7 = 1]
M = 5 (luglio) [tabella n° 1]
S = 1 [(ss = 19)] [tabella n° 2b]
A = 20 [(aa = 48), 48 mod 28 = 20]
B = 5 {int[(48 mod 28) / 4] = int(20 / 4) = 5}
R = G + m + S + A + B = 1 + 5 + 1 + 20 + 5 = 32
32 mod 7 = 4
Giovedì [tabella n° 3]

Il giorno 01 luglio 1948 era un ***giovedì*** (giorno di nascita dell’Autore)

Appendice «2g»

I bioritmi

Premessa

Un **bioritmo** (dal greco βίος - *bios*, vita e ῥυθμός - *rhutmos*, ritmo) è un tentativo di predire vari aspetti della vita di una persona attraverso una semplificazione matematica.

Il bioritmo è una sorta di orologio interno che scandisce aspetti e tendenze della vita di una persona e viene rappresentato con semplici curve sinusoidali.

La teoria dei bioritmi è una *teoria pseudoscientifica* che afferma che le nostre vite quotidiane siano significativamente soggette a cicli ritmici che studiano i ritmi biologici.

Storia

Nel tardo **XIX** secolo**, Wilhelm Fliess**, paziente di **Sigmund Freud**, ha individuato i ritmi e di «23 giorni» e di «28 giorni», usati ancora oggi in bioritmica, essendo convinto della regolarità di questi cicli osservata in molti fenomeni; elaborò questi cicli definendo e quello di «23 giorni» *maschile* e quello di «28 giorni» *femminile*, in concordanza con il ciclo mestruale della donna.

Nel 1904 **Hermann Swoboda**, affermò di aver scoperto, indipendentemente dagli altri, gli stessi cicli.

Wilhelm Fliess (1858 – 1928) è stato un chirurgo berlinese.

Sigismund Schlomo Freud, noto come **Sigmund Freud** (1856 – 1939) è stato un ed un neurologo ed un psicoanalista ed un filosofo austriaco, fondatore della psicoanalisi, la più antica tra le correnti della psicologia dinamica.

Hermann Swoboda (1873 - 1963) è stato un e psicologo e professore di psicologia all'università di Vienna.

Successivamente, **Alfred Teltscher**, e ricercatore e professore di ingegneria meccanica all'Università di Innsbruck, arrivò alla conclusione che le giornate e positive e negative dei suoi studenti osservassero uno schema ritmico di «33 giorni»; egli credeva che e l'abilità umana dell'apprendere e la vigilanza si alternassero con questo periodo.

Uno dei primi ricercatori accademici sui bioritmi fu e lo scienziato ed il medico ed il fisiologo estone **Nikolai Pärna** (1878 – 1923), che pubblicò, nel 1923, un libro in tedesco chiamato *Ritmi, vita e creazione*.

La legge di Swoboda-Fliess-Teltscher, più conosciuta come teoria dei bioritmi, divenne molto popolare negli anni '70. In realtà, le sue basi furono poste alla fine del XIX secolo, ma fu solo nel **XX** secolo inoltrato quando acquisì notorietà e cominciò a essere considerata vera, almeno da alcuni.

Secondo la legge di Swoboda-Fliess-Teltscher, noi umani abbiamo dei cicli biologici di tre tipi; uno di essi è un ciclo fisico, che dura «23 giorni», un altro è un ciclo emotivo, che ha una durata di «28 giorni», un altro ancora è un ciclo intellettuale che dura «33 giorni».

La pratica di consultare i bioritmi diventò popolare negli anni settanta grazie ad una serie di libri pubblicati dal consulente americano per le pubbliche relazioni **Bernard Gittelson** (1918 - ?), tra cui *Bioritmi - Una scienza personale*, *Grafici dei bioritmi di gente famosa ed infame*, *La previsione dei bioritmi nello sport*.

La società di ***Gittelson, Biorithm Computers Inc.***, basò la sua attività commerciale nella vendita di grafici di bioritmi e calcolatori dedicati, ma la possibilità di predire eventi sportivi non fu confermata.

I grafici per i bioritmi per l'uso personale furono popolari negli Stati Uniti fino agli anni «'70»; molti luoghi (come le sale da gioco) possedevano apparecchi che potevano produrre grafici di questo tipo attraverso l'inserimento della data di nascita; i grafici di bioritmi si ritrovavano spesso anche sui quotidiani, di solito abbinati agli oroscopi.

I programmi per i bioritmi erano anche comuni nei comuni calcolatori, e verso la fine degli anni «'70» furono messi in vendita anche calcolatori di bioritmi portatili (e il Kosmos 1 e il Biolator della Casio).

Sebbene i bioritmi siano ora meno popolari, ci sono numerosi siti in internet che offrono gratuitamente grafici di bioritmi. Inoltre, ci sono programmi che offrono analisi bioritmiche avanzate.

Teoria

Secondo i sostenitori dell'esistenza dei bioritmi, la vita di una persona è influenzata da cicli biologici ritmici che influenzerebbero le abilità personali in vari aspetti, come quello e fisico ed emotivo ed intellettivo. Questi cicli iniziano alla nascita ed oscillano in modo costante (onde sinusoidali) nel corso della vita, così da semplificare con un modello matematico il livello delle abilità di una persona in questi ambiti, giorno per giorno. Il comportamento sinusoidale sarebbe derivato da aspetti ormonali e biochimici, con le loro attività di biofeedback corrispondenti alle concentrazioni chimiche.

Precisazioni

Il **biofeedback** è un processo che permette ad un individuo e di avere un certo controllo sulle normali funzioni involontarie del proprio organismo e di imparare come cambiare l'attività fisiologica allo scopo di migliorare la propria salute e le proprie prestazioni.

Bioritmi principali

Fisico = 23 g $\sin(2 \bullet \pi \bullet t / 23)$

Si riferisce all'aspetto fisico del corpo, alla salute e alla forza fisica.
Influisce su: forza fisica, resistenza, sopportazione, coordinazione

Emotivo = 28 g $\sin(2 \bullet \pi \bullet t / 28)$

Si riferisce all'aspetto emotivo, alla sensibilità verso le proprie emozioni e quelle degli altri.
Influisce su: umore, sensibilità, creatività

Intellettivo = 33 g $\sin(2 \bullet \pi \bullet t / 33)$

Si riferisce all'aspetto intellettuale, alla creatività e all'apprendimento.
Influisce su: pensiero analitico, logica, capacità di apprendimento, memoria

In cui: t = numero di giorni dalla nascita.

Alla nascita ogni ciclo inizia da zero e poi cresce in una fase positiva durante la quale le energie e le capacità sono elevate.

Ogni ciclo non solo ha una certa durata, ma all'interno di questa vi è del tempo in cui l'energia è *alta* e del tempo in cui l'energia è *bassa*.

Ciclo fisico

Alta energia: 11,5 giorni
Bassa energia: 11,5 giorni

Ciclo emozionale

Alta energia: 14 giorni
Bassa energia: 14 giorni

Ciclo intellettuale

Alta energia: 16,5 giorni
Bassa energia: 16,5 giorni

Come i cicli influenzano la nostra vita

A seconda che ci troviamo in una fase o con molta o con poca energia, si verificano i seguenti fenomeni.

Fasi positive

Le *fasi positive* si concretizzano quando un bioritmo resta sopra lo zero.

Nei giorni in cui la situazione fisica è in uno stato positivo (***elevata energia fisica***), ti senti in forma, adatto a lavorare in attività che richiedono sforzo e resistenza fisica; hai e più energia e più resistenza e le condizioni di salute tendono ad essere migliori.

Le pulsioni toccano il loro picco e proprio per questo si potrebbe essere più inclini ad assumere comportamenti poco ponderati.

Nei giorni di positività del ciclo emozionale (***elevata energia emotiva***), puoi sentirti e più amorevolee più sensibile e più ricettivo alle emozioni degli altri; le relazioni personali sono migliori, hai e più fiducia in te stesso e un atteggiamento più positivo; di solito hai buon umore e sei maggiormente predisposto ad andare d'accordo con gli altri.

Va comunque considerato anche l'aspetto negativo: l'individuo potrebbe rivelarsi eccessivamente emotivo, impulsivo, incline ad esagerazioni.

Nei giorni positivi del ciclo intellettuale (elevata energia intellettuale), puoi sentirti e più creativo e più aperto ed alle idee e ai punti di vista degli altri; l'apprendimento è favorito e sei più abile e nel trovare la soluzione ai problemi e nel concepire buone idee.

Hai la memoria più reattiva. sei più incline ad ampliare le tue prospettive e, qualor fossi impossibilitato a realizzare un porgetto, ti potresti sentire annoiato.

Fasi negative

Le *fasi negative* si concretizzano quando un bioritmo scende sotto lo zero; non si tratta necessariamente dei periodi peggiori, poiché li si può considerare come una fase di ricarica.

Dal punto di vista fisico, i giorni negativi (***bassa energia fisica***) potresti sentirti e più scarico e più debole e più stanco; ti inducono un bisogno di maggiore riposo e le tue difese immunitarie non sono al massimo della loro efficienza.

Le tue pulsioni mostrano segni di fiacchezza e potresti avere inappetenza e gli sforzi ti potrebbero risultare gravosi.

Nei giorni negativi del ciclo emotivo (***bassa energia emotiva***) puoi essere ed irritabile, e meno cooperativo e negativo e diffidente e non socievole si può affacciare la tendenza a ritrarsi, a scansare doveri o a ritrarsi, preferendo restare da soli piuttosto che in compagnia degli altri.

Potresti sperimentare stati di depressione, soprattutto quando il ciclo raggiunge il punto più basso.

Nei giorni negativi del bioritmo intellettuale (***bassa energia intellettuale***) non sei molto ricettivo nei confronti e di nuovi concetti e di nuove idee; ed il lavoro creativo e l'apprendimento potrebbero risultarti più difficili e potresti riscontrare difficoltà e nel prendere decisioni e nella capacità di concentrazione.

La comunicazione interpersonale ti diventa più difficile, anche se va ripetuta la potenzialità di ricarica di energie dei giorni in cui il bioritmo è negativo; un periodo e di riposo e di rilassatezza contribuirebbe sempre ad un sano equilibrio vegetativo.

Giorni critici

I giorni critici sono quelli durante i quali un ciclo passa o dalla fase positiva a quella negativa o viceversa, attraversando il punto zero; ua linea di demarcazione orizzontale che divide il diagramma in due semiparti: superiore, inferiore.

Sebbene l'aggettivo *critico* abbia un valore relativo, in generale si considerano giorni critici sia quelli successivi alla conclusione della fase alta di un ciclo sia l'ultimo giorno della fase bassa della curva sinusoidale.

Si tratta di fasi di cambiamento, durante le quali l'organismo vive una condizione di flusso. Ciò significa che è opportuno evitare di agire in modo impulsivo, azzardato, e che occorre prestare attenzione agli impulsi inviati dall'aspetto vitale considerato (fisico, emozionale, intellettuale, intuitivo).

I giorni che precedono e che seguono i giorni critici sono definiti ***semicritici***.

Un'altra situazione si verifica quando si osservano giorni critici doppi o tripli, cioè quelli in cui si intersecano due o tre cicli bioritmici.

Il primo momento critico triplo è quello della nascita, cioè l'inizio della *prima era bioritmica*; la *seconda era bioritmica* comincia a poco più di «58 anni», al raggiungimento del giorno di vita numero «21.253».

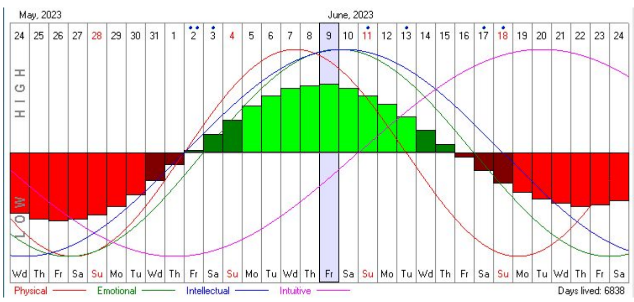
Ricerca statistica.

Alcune ricerche statistiche sugli ultra cinquantenni sembrano dimostrare che durante questi giorni *critici*, specialmente quelli e fisico ed emozionale, si è più predisposti agli incidenti, si manca e di coordinazione e di giudizio e di prontezza. Durante un giorno critico dal punto di vista emozionale, le persone sono più suscettibili a commettere errori quando parlano, sono più indotte a pronunciare espressioni irresponsabili, a litigare oppure ad ingaggiare dispute.

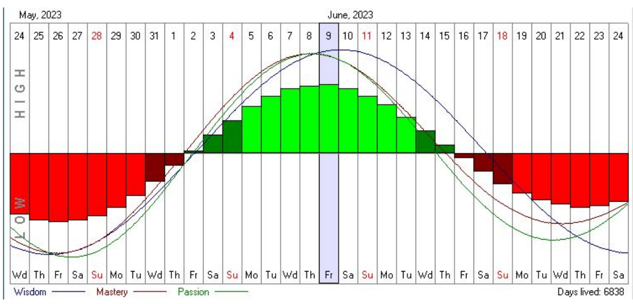
Da un punto di vista intellettuale, il giorno critico potrebbe essere causa o di vuoti di memoria o di errori.

Programmi

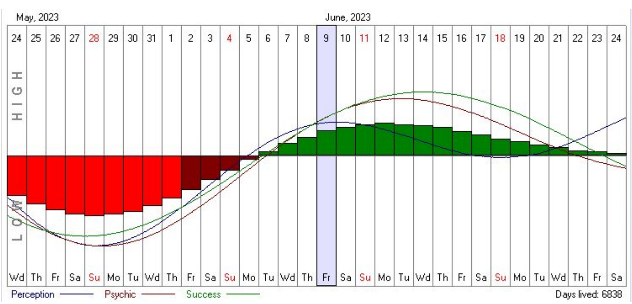
Nel Web (***World Wide Web***) vi sono molti programmi dedicati ai bioritmi



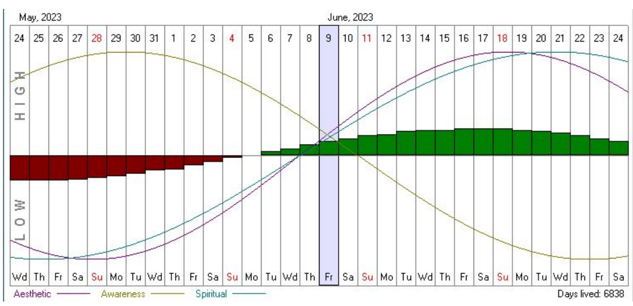
[fig. 01]



[fig. 02]



[fig. 03]



[fig. 04]

I ***bioritmi principali*** attengono al ciclo ***Fisico***, al ciclo ***Intellettuale*** ed a quello ***Emozionale***; nella *calcolatrice* che ha utilizzato L'Autore è stato aggiunto, nella stessa schermata, il ciclo ***Intuitivo***, la predisposizione ed all'empatia ed all'ispirazione di un soggetto; quest'ultimo non appartiene ai *bioritmi principali*, ma è annoverato fra i *bioritmi secondari*.

Secondo la teoria dei Bioritmi, i cicli e fisici ed intellettuali si incontrano ogni «644 giorni», i cicli e fisico ed emozionale si incontrano ogni «759 giorni», i cicli ed intellettuali ed emozionali si incontrano ogni «924 giorni»; i cicli e fisici ed intellettuali ed emozionali si incontrano ogni «21 252 giorni», con un totale di 4.326 giorni critici.

mcm	giorni	anni	Periodi
23, 28	644	≈1,76	≈$1^a\ 9^m\ 8^g$
23, 33	759	≈2,08	≈$2^a\ 0^m\ 30^g$
28, 33	924	≈2,53	≈$2^a\ 6^m\ 11^g$
23, 28, 33	21 252	≈58,22	≈$58^a\ 2^m\ 20^g$

In [fig. 01] si possono individuare sia i giorni critici e del «3» e dell'«11» e del «13» e del «17» e del «18» giugno, contrassegnati con un asterisco sia il giorno critico doppio del «2» giugno, contrassegnato con due asterischi.

In [fig. 02] sono stati aggiunti i cicli e della *saggezza* (30 giorni) e della *padronanza* (27 giorni) e della *passione* (25 giorni).

In [fig. 03] sono stati aggiunti i cicli e della *percezione* (26 giorni) e dello stato psichico (32 giorni) e del *successo* (36 giorni).

In [fig. 04] sono stati aggiunti i cicli e dell'*estetica* (43 giorni) e della *consapevolezza* (48 giorni) e della *spiritualità* (53 giorni).

Bioritmi secondari

Intuitivo 38 g	sin(2 • π • t / 38)
Estetico 43 g	sin(2 • π • t / 43)
Consapevolezza 48 g	sin(2 • π • t / 48)
Spirituale 53 g	sin(2 • π • t / 53)

In cui: t = numero di giorni dalla nascita.

Se qualche lettore ne volesse aggiungere altri, prego di comunicarmelo.

La pseudoscienza

I ***bioritmi*** e la ***legge di Swoboda-Fliess-Teltscher*** sono uno degli esempi più ***paradigmatici*** di ***pseudoscienza*** diventata popolare, anche se la teoria fu accolta con diffidenza fin dall'inizio dagli ambienti scientifici; solo nel 1998 il e professore di psicologia alla Pace University di New York e professore a contratto di neurologia al New York Medical College e scrittore scientifico **Terence Hines** (1951 - ?) condusse uno studio approfondito al riguardo.

La sua conclusione fu che tali cicli non esistono.

Precisazioni

Il paradigma: dal greco *παράδειγμα*, composto da παρα «para» e δείκνυμι «mostrare» che serve di paradigma, quindi di esempio, di modello; che ha valore esemplare.

La pseudoscenza: è ogni o teoria o metodologia o pratica, che od afferma o pretende o vuole apparire scientifica, ma che tuttavia non soddisfa i criteri tipici di scientificità, ovvero non adotta il metodo scientifico, che è il metodo alla base della scienza moderna, per o dimostrare le proprie affermazioni o progredire; tra i primi ad usare questo termine ci fu il fisiologo francese **François Magendie** (1783 – 1855), considerato un pioniere della fisiologia sperimentale.

Il termine deriva dal prefisso greco ψευδής *pseudés* (falso, mendace) e dal latino *scientia* conoscena).

Hines contestò il fatto che le osservazioni e le teorizzazioni sulle quali venne costruita la *legge di Swoboda-Fliess-Teltscher* fossero del tutto arbitrarie; non era stato applicato il metodo scientifico e veniva attribuito a delle congetture il valore di conclusione.

La fiducia in questa teoria induceva le persone ad associare liberamente ciò che succedeva loro e ciò che diceva questo strumento; o con o senza basi, finivano con l'attribuire un valore a dei fatti che si spiegavano semplicemente con il caso.

Hines constatò anche che i cicli e fisico ed emotivo ed intellettuale non esistono; ovviamente nell'essere umano esistono cicli fisiologici e ormonali, ma questo non ha niente a che vedere né con la produttività né con i giorni critici né con niente del genere.

Malgrado le e numerose ed evidenti prove presentate, che infirmano la teoria dei bioritmi, ancora molte persone, nel mondo, continuano a credere in essi; l'unica nota positiva e che, in fondo, chi ci crede non fa male a nessuno..

Appendice «2h»

Il poker

La storia

Le sue origini del **Poker** sono piuttosto antiche, si pensa che abbiano almeno «1 000» anni e che abbiano attraversato numerose e culture e continenti.

Alcuni storici sostengono che le origini del *Poker* possono essere individuate in un gioco di carte, simile al domino, ideato dall'imperatore cinese durante il **X** secolo; altri, invece, credono che le sue reali origini risalgano ad una ed evoluzione e rivisitazione di un gioco di carte persiano denominato **âs nas** praticato a partire dal **XVI** secolo.

L'antenato europeo più vicino al *Poker*, invece, è il **Poque**, risalente al **17° secolo** con origini francesi, ma prende spunto da un'altro gioco spagnolo del 16° secolo che prevedeva e l'uso di «3 carte» per ogni giocatore ed il bluff era una componente chiave della partita.

I coloni francesi introdussero il *Poque* nel Nord America e nei primi del «1 800» venne perfezionato mitico West americano, in particolare sui battelli a vapore che risalivano il Mississippi (dei veri casinò galleggianti) fino a raggiungere la versione moderna del Poker che include le «5 carte» ad ogni giocatore.

Il nome **Poker** proviene dall'omonimo punteggio; sembrerebbe strano pensare che il nome del gioco non rappresenti quello che è il punteggio massimo, ossia la *scala reale*, ma si deve tener conto che, alle origini del gioco del *poker*, non esisteva né il punteggio di *scala di colore* né tantomeno quello di *scala reale*.

Il nome deriva, probabilmente, dal termine francese *poque* (ingannare), che, a sua volta, deriva dal tedesco *pochen*.

Il mazzo

Si gioca con un mazzo di «52» carte composte da «13» carte per ognuno dei quattro semi: cuori (hearts), quadri (diamonds), fiori (clubs), picche (spades).

Le 13 carte di ogni seme, in ordine crescente per valore sono: dal 2 al 10, fante (jack), donna (queen), re (king), asso (ace).

Considerando che a ciascun giocatore vengono distribuite «5» carte, il numero di mani differenti che si possono avere, con un mazzo di «52» carte, è il numero delle combinazioni delle «52» carte prese a «5» a «5»:

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\ (52-5)!} = \frac{52}{5! \bullet 47!} = 2\,598\,960$$

Le mani

Il valore delle mani, in ordine decrescente, è presentato appresso con le relative probabilità iniziali, cioè nelle prime cinque carte distribuite.

Scala reale (royal flush)

E' costituita da cinque carte dello stesso seme in scala dal «10» all'Asso.
Ha una frequenza di:

$$F = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)} = 4$$

Di tutte le combinazioni possibili, in un mazzo completo di «52» carte, solo «4» possono essere ***scala reale***, con una probabilità di:

$$p = \frac{4}{2\,598\,960} = 0{,}000\,001\,539\,.\,.\,. \approx 1{,}539 \bullet\ 10^{-6} \approx 0{,}000\,154\%.$$

Distigt hands = 1.
Cumulative probabilyti ≈ 0,000 154%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{4}$ = 649 740:1.

Chiarimenti

In statistica, col termine inglese ***distigt hands*** si intende il numero di modi diversi per designare la mano, senza contare i semi diversi.

In statistica, col termine inglese ***Cumulative probabilyti*** si intende

In statistica, con il termine inglese **odds against** (probabilità contrarie) si intende il rapporto fra il numero di casi possibili e quello dei casi favorevoli: «(1/*p*) -1:1».

Osservazioni

In questo caso, se si usasse una delle formule indicate alla fine dei **Chiarimenti**, si troverebbe il valore di *odds against* uguale a «649 771 . . .:1», leggermente diverso dal valore di «649 740»; ciò è dovuto al fatto che il valore di «*p* = 0,000 001 539 . . .» è un valore approssimato.

Lo stesso avverrebbe per tutti gli altri *odds against* che verranno calcolati in seguito.

Scala di colore (stright flush)
E' costituita da cinque carte dello stesso seme in sequenza.
Ha una frequenza di:

$$F=\binom{10}{1}\bullet\binom{4}{1}-\binom{4}{1}=\frac{10!}{1!\,(10-1)!}\bullet\frac{4!}{1!\,(4-1)!}-\frac{4!}{1!\,(4-1)!}=10\bullet 4-4=36$$

Le ***scale colore*** possibili sono «36», con una probabilità di:

$$P=\frac{36}{2\,598\,960}\approx 0{,}000\,013\,851\ldots\approx 1{,}385\bullet 10^{-5}=0{,}001\,385\%$$

Nelle *scale colore* non sono state incluse le *scale reali*.

Distigt hands = 9.
Cumulative probabilyti ≈ 0,001 54%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{36}$ = 72 192,$\bar{3}$:1 $=\left(\frac{721\,923-721\,92}{9}=\frac{649\,731}{9}\right)$

Poker (four of a kind)
E' costituito da quattro carte di uguale valore più una qualsiasi quinta carta.
Ha una frequenza di:

$$F=\binom{13}{1}\bullet\binom{4}{4}\bullet\binom{12}{1}\bullet\binom{4}{1}=\frac{13!}{1!\,(13-1)!}\bullet\frac{4!}{4!\,(4-4)!}\bullet\frac{12!}{1!\,(12-1)!}\bullet\frac{4!}{1!\,(4-1)!}=13\bullet 1\bullet 12\bullet 4=624$$

I ***poker*** possibili sono «624», con una probabilità di:

$$P=\frac{624}{2\,598\,960}\approx 0{,}000\,240\,096\ldots\approx 2{,}401\bullet 10^{-4}\approx 0{,}024\,010\%$$

Distigt hands = 156.
Cumulative probabilyti ≈ 0,025 6%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{624}$ = 4 165:1

Full (full house)
E' costituito da tre carte dello stesso valore (tris) più altre due carte di uguale valore tra loro (coppia).
Ha una frequenza di:

$$F=\binom{13}{1}\bullet\binom{4}{3}\bullet\binom{12}{1}\bullet\binom{4}{2}=\frac{13!}{1!\,(13-1)!}\bullet\frac{4!}{3!\,(4-3)!}\bullet\frac{12!}{1!\,(12-1)!}\,\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=13\bullet 4\bullet 12\bullet 6=3\,744$$

I ***full*** possibili, in un mazzo completo di «52» carte, sono «3 744» con una probabilità di:

$$P=\frac{3\,744}{2\,598\,960}\approx 0{,}001\,440\,576\ldots\approx 1{,}440\bullet 10^{-3}\approx 0{,}144\%$$

Distigt hands = 156.
Cumulative probabilyti ≈ 0,179%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{3\,744}$ = 694,1$\bar{6}$:1 $=\left(\frac{69\,416-6\,941}{90}=\frac{62\,475}{90}\right)$

Colore (flush)
E' composto da cinque carte tutte dello stesso seme non in sequenza.
Ha una frequenza di:

$$F=\binom{13}{5}\bullet\binom{4}{1}-\binom{10}{1}\bullet\binom{4}{1}=\frac{13!}{5!\,(13-5)!}\bullet\frac{4!}{1!\,(4-1)!}\bullet\frac{10!}{1!\,(10-1)!}\,\frac{4!}{1!\,(4-1)!}=1\,287\bullet 4-10\bullet 4=5\,108$$

I ***colore*** possibili sono «5 108», con una probabilità di:

$$P=\frac{5\,108}{2\,598\,960}\approx 0{,}001\,965\,401\ldots\approx 1{,}965\bullet 10^{-3}\approx 0{,}196\%$$

Distigt hands = 1 277.
Cumulative probabilyti ≈ 0,367%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{5\,108}$ = 508,801 . . .:1

Scala (straight)
E' composta da cinque carte in sequenza, ma non tutte dello stesso seme.
Ha una frequenza di:

$$F=\binom{10}{1}\bullet\binom{4}{1}^{5}-\binom{10}{1}\bullet\binom{4}{1}=\frac{10!}{1!\,(10-1)!}\bullet\left(\frac{4!}{1!\,(4-1)!}\right)^{5}\bullet\frac{10!}{1!\,(10-1)!}\,\frac{4!}{1!\,(4-1)!}=10\bullet 1\,024-10\bullet 4=10\,200$$

Le ***scale*** possibili sono «10 200», con una probabilità di:

$$P=\frac{10\,200}{2\,598\,960}\approx 0{,}003\,924\,678\ldots\approx 3{,}925\bullet 10^{-3}\approx 0{,}393\,925\%$$

Distigt hands = 10.

Cumulative probabilyti ≈ 0,76%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{10\,200}$ = 254,8:1

Tris (three of a kind)
E' costituita da tre carte dello stesso valore e altre due carte spaiate.

Ha una frequenza di:

$$F = \binom{13}{1}\bullet\binom{4}{3}\bullet\binom{12}{2}\bullet\binom{4}{1}^2 = \frac{13!}{1!\,(13-1)!}\bullet\left(\frac{4!}{3!\,(4-3)!}\right)^5\bullet\frac{12!}{2!\,(12-2)!}\bullet\frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 13\bullet 4\bullet 66\bullet 16 = 54\,912$$

I ***tris*** possibili sono «54 912», con una probabilità di:

$$P = \frac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}021\,128 \approx 2{,}112 \bullet 10^{-2} \approx 2{,}11\,28\%.$$

Distigt hands = 858.
Cumulative probabilyti ≈ 2,87%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{54\,912}$ = 47,329 . . .:1

Doppia copia (tow pairs)
E' costituita da due coppie di carte uguali e da una quinta carta spaiata.
Ha una frequenza di:

$$F = \binom{13}{2}\bullet\binom{4}{2}^2\bullet\binom{11}{1}\bullet\binom{4}{1} = \frac{13!}{2!\,(13-2)!}\bullet\left(\frac{4!}{2!\,(4-2)!}\right)^2\bullet\frac{11!}{2!\,(11-2)!}\bullet\frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 78\bullet 36\bullet 11\bullet 4 = 123\,552$$

Le ***doppie coppie*** possibili sono «123 552», con una probabilità di:

$$P = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0{,}047\,539\,.\,.\,..\approx 4{,}754\bullet\ 10^{-2} \approx 4{,}75\%\,.$$

Distigt hands = 858.
Cumulative probabilyti ≈ 7,62%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{123\,552}$ = 21,035 . . .:1

Coppia (one pair)
E' costituita da due carte dello stesso valore e altre tre carte non abbinate.
Ha una frequenza di:

$$F = \binom{13}{1}\bullet\binom{4}{2}\bullet\binom{12}{3}\bullet\binom{4}{1}^3 = \frac{13!}{1!\,(13-1)!}\bullet\frac{4!}{2!\,(4-2)!}\bullet\frac{12!}{3!\,(12-3)!}\bullet\left(\frac{4!}{1!\,(4-1)!}\right)^3 = 13\bullet 6\bullet 220\bullet 64 = 1\,098\,240$$

Le ***coppie*** possibili sono «1 098 240», con una probabilità di:

$$P = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}422\,569 \approx 4{,}225 \bullet 10^{-1} \approx 42{,}256\,9\%.$$

Distigt hands = 2 860.
Cumulative probabilyti ≈ 49,9%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{1\,098\,240}$ = 2,366 . . .:1

Carta (card of a deck)
Tutte le mani che non realizzano nessuna delle precedenti combinazioni sono costituite da «5 carte» differenti non combinate tra loro.

$$F = \left[\binom{13}{5} - \binom{10}{1}\right]\bullet\left[\binom{4}{1}^5 - \binom{4}{1}\right] = [1\,287 - 10]\bullet[1\,024 - 4] = 1\,302\,540$$

Le ***coppie*** possibili sono «1 302 540», con una probabilità di:

$$P = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0{,}501\,177\,.\,.\,.\approx 5{,}012 \bullet 10^{-1} \approx 50{,}117\,7\%.$$

Distigt hands = 1 277.
Cumulative probabilyti ≈ 100%.
Odds against = $^{2\,598\,960}/_{1\,302\,540}$ = 1,995 . . .:1

Totale
Distigt hands = 7 462.
Frequency = 2 598 960
Probabilyti = 100%
Cumulative probabilyti ≈ –.
Odds against = 0:1

Osservazioni
Come detto precedentemente, forse non avendolo evidenziato sufficientemente, tutti i valori e delle frequenze e delle probabilità, sono riferiti esclusivamente alle prime cinque carte che vengono distribuite.

Riepilogo dei valori

Mano	Mani distinte	Frequenza	probabilità	Probabilità cumulativa	Probabilità contraria
Scala reale	1	4	0,000 154%	0,000 154%	649 740:1
Scala di colore	9	36	0,001 39%	0,001 54%	72 192,$\overline{3}$:1
Poker	156	624	0,024%	0,025 6%	4 165:1
Full	156	3 744	0,144%	0,179%	694,1$\overline{6}$:1
Colore	1 277	5 108	0,196%	0,367%	508 801 ...:1
Scala	10	10 200	0,393%	0,76%	254,8:1
Tris	858	54 912	2,113%	2,87%	47,329 ...:1
Doppia coppia	858	123 552	4,75%	7,62%	21,035 ...:1
Coppia	2 860	1 098 240	42,2%	49,9%	2,336:1
Carta	1,277	1 302 540	50,1%	100%	1,995 ...:1
	7,462	2 598 960	100%	–	0:1

Varianti

Nel Poker a «32 carte», il valore delle mani, in valore decrescente, è: scala reale, poker, colore, full, scala semplice, tris, doppia coppia, coppia.

Parimenti sono differenti e le frequenze e le probabilità per ciascuna mano.

Appendice «2i»

L'angolo dei perché

0! = 1

Premessa

Qualcuno o si sarà chiesto o si chiede o si chiederà come mai il fattoriale di zero è uguale ad uno: 0! = 1; la risposta, qualche volta, o sarà stata o è o sarà che è semplicemente una convenzione matematica.

Ragioniamo

Il fattoriale di un numero «n», indicato con «n!», (si legge o n-fattoriale o fattoriale di n) è il valore numerico ottenuto dalla relazione: 1 • 2 • 3 • . . . • n-2 • n-1 • n; quindi il prodotto di tutti i numeri da «1» a «n».

Ad esempio «3!» (fattoriale di 3) è «6» poiché «1 • 2 • 3 = 6»; avvalendoci della ***relazione di ricorrenza*** (o ***equazione di ricorrenza***) «n! = n • (n – 1)!», possiamo anche scrivere: 3! = 3 • (3 – 1)! = 6.

Il fattoriale del numero «n», parimenti, indica il numero delle possibili permutazioni di un insieme contenente «n» elementi non ripetuti.

Si prenda come esempio le permutazioni relative ad un insieme costituito dalle tre lettere A, B, C (o dai tre numeri naturali 1, 2, 3).

A B C	A C B	B A C	B C A	C A B	C B A
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1

Il «fattoriale di 3» è appunto «6».

«0!» o «0 al fattoriale» corrisponde, pertanto, alle permutazioni possibili senza ripetizione di «0» oggetti.

Considerando che:

- deve essere sempre valida la legge di ricorrenza quindi: 1! = 1 • 0!, ma «1! = 1», dunque «0! = 1».
- un insieme costituito da zero elementi ha una, e una sola permutazione possibile, dunque «0! = 1».

1! = 1

Premessa

Sappiamo (vedi **Il fattoriale**, a pagina 51) che: n! = n • (n – 1)! = n • 1!

Per cui

Per «n = 2» si ha: 2! = 2 • (2 – 1)! = 2 • 1!.
Per la definizione di fattoriale, possiamo scrivere: 2! = 2 • 1 = 2.
Per la proprietà transitiva, si ha: 2 • 1! = 2
Pertanto, deve essere:1! = 1

a^0 = 1

Premessa

Qualcun'altro o si sarà chiesto o si chiede o si chiederà come mai un numero elevato a zero è uguale ad uno: $a^0 = 1$; anche in questo caso, la risposta, qualche volta, o sarà stata o è o sarà che è semplicemente una convenzione matematica.

Ragioniamo

Il rapporto fa due potenze che abbiano la stessa base «a» e diverso esponente, uno «m» l'altro «n», è dato da una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza fra gli esponenti:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Il rapporto fa due potenze che abbiano la stessa base «a» e lo stesso esponente «m», è dato da una potenza che ha la stessa base con esponente zero:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Sapendo che il rapporto di un numero per se stesso è sempre uguale ad uno, possiamo affermare che un numero elevato zero è anch'esso uguale ad uno poiché è il rapporto di una potenza per se stessa:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

$\sqrt{2} = 2^{1/2}$

Premessa

Quest'affermazione viene giustamente data per scontata, essendo stata acquisita fin dai primi anni delle scuole medie, ma in matematica nulla deve essere dato per scontato; un'affermazione è valida solo se è dimostrata.

Ragioniamo

Consideriamo la radice quadrata di un numero al quadrato: «$\sqrt{n^2} = n$».

Se eleviamo e il primo e il secondo membro alla stessa potenza, l'uguaglianza continua a persistere: «$\left(\sqrt{n^2}\right)^2 = n^2$».

Per la proprietà delle potenze «$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$» la «$\left(\sqrt{n^2}\right)^2 = n^2$» diventa, infatti, «$n^2 = n^2$».

Se, pertanto, eleviamo e il primo e il secondo membro della «$\sqrt{n^2} = n$» all'esponente «$^1/_2$», otteniamo: «$\left(\sqrt{n^2}\right)^{1/2} = n^{\frac{1}{2}}$».

Sempre per la proprietà della *potenza di potenza* avremo: $\left(\sqrt{n^2}\right)^{1/2} = \sqrt{n^{2\frac{1}{2}}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$ ed in particolare «$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$».

Costatato che «n» è un qualsiasi numero la «$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$» è sempre valida per qualsiasi valore di «n»; in particolare anche per «n = 2».

Possiamo, pertanto, scrivere: «$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$».

(- • -) = +

Premessa

Il lettore attento si sarà reso immediatamente conto che qui non si sta cercando di dimostrare che «K = +» (nel codice Morse: K = - • -), ma si sta cercando una giustificazione alla più banale definizione che afferma: *meno* per *meno* uguale a *più*.

Ragioniamo

Nell'insieme dei numeri relativi, per ogni elemento «b» esiste il corrispondente elemento opposto «- b» per cui si ha: «b + (- b) = b - b = 0», dove lo *zero* è l'elemento neutro rispetto alla somma («b + 0 = b», qualunque sia «b»).

L'operazione di moltiplicazione nei numeri relativi è definita in modo tale che ogni elemento, o positivo o negativo, moltiplicato per «*zero*» fornisce come risultato sempre «zero»; possiamo, pertanto, scrivere: «-a • 0 = 0», qualunque sia «a»).

Dunque, possiamo scrivere anche: «(- a) • (b – b) = 0», ma per la proprietà distributiva della moltiplicazione si ha che «b • (- a) + (- b) • (- a) = 0», da cui discende che i due addendi e «b • (- a)» e «(- b) • (- a)» sono l'uno l'elemento opposto dell'altro.

Costatando il fatto che «b • (- a) = -n», si dovrà necessariamente accettare anche il fatto che «(- b) • (- a) = n», in quanto solo così «n – n = 0»; questo comprova anche il fatto che «- • - = +» rendendo *coerente* la struttura algebrica.

Fra Luca Bartolomeo de Pacioli o anche *Paciolo* (1445 *circa* – 1517) è stato un e religioso e matematico ed economista italiano; nel 1494, pubblicò la ***Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità*** in cui la regola dei segni viene enunciata in questi termini:

Più via più sempre fa più
Meno via meno sempre fa più
Più via meno sempre fa meno
Meno via più sempre fa meno.

Il nodo

Premessa

Per misurare le lunghezze in mare si usa ancor oggi il ***miglio nautico internazionale*** (**M** o **NM** o **nmi**) dall'inglese *nautical mile*, o ***miglio marino*** è un'unità di misura di lunghezza pari a «1 852 m».

E’ stata scelta questa unità di misura per il fatto che equivale alla lunghezza dell’arco di circonferenza massima, equatore o meridiano sulla sfera terrestre, sotteso da un angolo al centro della Terra di ampiezza pari a «1’ (primo) = $^1/_{60}$ di grado», sul parallelo medio alla latitudine di φ = 44° 20′.

Sapendo e che la circonferenza della terra o all'equatore od in un circolo massimo (meridiano e antimeridiano) è di circa «40 000 km» e che ogni circonferenza è composta di «360°» e che ogni grado è composto da «60’», possiamo dedurre che dividendo i «40 000 km» per «21 600’» (360 • 60) otteniamo la misura di «1,85185 km» arrotondati per convenzione a «1 852 m».

L’unità di misura della velocità usata ancora oggi in ambito aeronautico è il ***nodo***, il quale è definito come un ***miglio nautico internazionale all’ora***.

Ma perché proprio il termine ***nodo***?

Per misurare la velocità di una nave, veniva lanciata in mare, da poppa, una cordicella cui era legato un travetto di legno con funzione di galleggiante; lungo la corda erano stati fatti alcuni nodi a cadenza costante di «50 piedi» e «2,5 pollici» pari a «15,433 m».

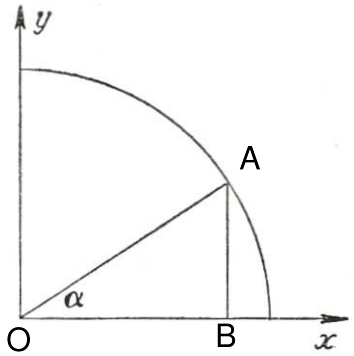
Il calcolo della velocità veniva effettuato da due marinai: uno doveva lanciare la cordicella e contare quanti nodi attraversavano le sue dita, mentre un altro teneva il tempo usando una clessidra da «30 secondi».

Dato che «15,433 m» sono «$^1/_{120}$» di miglio marino, mentre «30 secondi» sono «$^1/_{120}$» di ora, il conteggio dei nodi passati tra le dita del marinaio in «30 secondi» corrispondeva alla velocità della nave in *nodi*.

sen² α + cos² α = 1

Premessa

Consideriamo, nel sistema cartesiano in figura, l’arco di raggio unitario «O A».



Da ciò possiamo scrivere:

«O A» = 1

«A B» = sen α (1 • sen α)

«O B» = cos α (1 • cos α)

Ragioniamo

Per il teorema di Pitagora si ha: «A B»^{2} + «O B»^{2} = «O A»^{2}

Sapendo che «O A» = 1, si ha: «A B»^{2} + «O B»^{2} = 1

Pertanto, sostituendo:

$\text{sen}^2\,\alpha \bullet \cos^2\alpha = 1$

Gli alveari hanno celle esagonali

Premessa

Si definisce ***tassellazione*** un modo di ricoprire un piano con figure geometriche uguali, siano esse o regolari o convesse o irregolari o concave, con lati o retti o curvi.

L’esagono è la figura geometrica col più alto numero di lati che riempie uniformemente un piano col minore utilizzo di cera, poiché ogni lato è in comune con le celle adiacenti.

L’alveare

Gli ***alveari*** sono costituiti da ***favi*** i quali sono un insieme di piccole ***celle esagonali*** che vanno a formare quelle generalmente conosciamo come ***struttura a nido d’ape***.

La forma esagonale è una struttura ed efficiente ed efficace; ha molti vantaggi, tra cui la resistenza strutturale, l'efficienza dello spazio e la regolazione della temperatura.

Gli esagoni distribuiscono il peso in modo uniforme, rendendoli ideali per sostenere il peso del miele e delle api.

Le celle esagonali possono adattarsi strettamente insieme per un uso efficiente dei volumi, massimizzando la quantità di spazio di *archiviazione* all'interno di un alveare.

La forma esagonale è ottimale per la regolazione della temperatura, in quanto consente un efficiente flusso d'aria e distribuzione del calore.

Appendice «2m»

Criteri di divisibilità

Premessa

In aritmetica, i ***criteri di divisibilità*** sono degli algoritmi che permettono di verificare la divisibilità di un numero intero per un fattore senza eseguire la divisione esplicita.

Consistono in una serie di operazioni sulle cifre che compongono il numero. Tali operazioni dovrebbero essere sufficientemente semplici da potersi fare a mente o comunque essere più veloci rispetto alla divisione.

Poiché i criteri di divisibilità manipolano direttamente le cifre del numero, dipendono dalla base in cui il numero viene espresso. In pratica, per contro, si considerano solamente i criteri di divisibilità per i numeri in «base 10».

Criteri di divisibilità per alcuni numeri

Divisibilità per «0»

Nessun numero è divisibile per «0».

Divisibilità per «1»

Tutti i numeri sono divisibili per «1».

Divisibilità per «2»

Un numero è divisibile per «2» se termina o con zero (0) o con una cifra pari, ovvero con o «0» o «2» o «4» o «6» od «8».

Divisibilità per «2^n»

Un numero è divisibile per «2^n» se lo è il numero composto dalle «n» cifre più a destra del numero.

Divisibilità per «3»

Un numero è divisibile per «3» se la somma delle sue cifre è o «3» o un multiplo di «3»; nel caso in cui tale somma sia un numero maggiore di «9», si può eseguire nuovamente l'operazione.

Divisibilità per «4»

Un numero è divisibile per «4» se le ultime due cifre sono o «00» o formano un numero multiplo di «4»; o, parimenti, le ultime due cifre sono tali che la sua penultima cifra è ***dispari*** e l'ultima cifra è o «2» o «6», oppure la sua penultima cifra è ***pari*** e l'ultima cifra è o «0» o «4» od «8».

Divisibilità per «5»

Un numero è divisibile per «5» se la sua ultima cifra è o «0» o «5».

Divisibilità per «5^n»

Un numero è divisibile per «5^n» se lo sono le sue ultime «n» cifre più a destra.

Divisibilità per «6»

Un numero è divisibile per «5» se è contemporaneamente divisibile e per «2» e per «3».

Divisibilità per «7»

Un numero, con più di due cifre, è divisibile per «7» se:

a) la somma tra il numero ottenuto escludendo la cifra delle unità (*prenumero*) e il quintuplo della cifra delle unità (*coda numerica*) è multiplo di «7».

b) la differenza del numero ottenuto escludendo la cifra delle unità ed il doppio della cifra delle unità è o zero (0) o «7» od un multiplo di sette.

Divisibilità per «8»

Un numero è divisibile per «8» se o termina con tre zeri (000) o se è un multiplo di «8» il numero formato dalle sue ultime tre cifre.

Esempio: considerando il numero «15 736», si eseguono le seguenti operazioni: «7 • 2 = 14», «14 + 3 = 17», «17 • 2 = 34», «34 + 6 = 40»; constatato che «40» è un multiplo di «8», il numero «15 736» è divisibile per «8»..

Divisibilità per «9»

Un numero è divisibile per «9» se la somma delle sue cifre è o «9» od un multiplo di «9»; nel caso tale somma sia un numero maggiore di «9», si può reiterare l'operazione..

Divisibilità per «10»

Un numero è divisibile per «10» se la sua ultima cifra è zero (0).

Divisibilità per «10^n»

Un numero è divisibile per «10^n» se le sue ultime cifre sono «n» volte «0».

Esempio: «5 000» è divisibile per «10^3 = 1 000» perché «1 000» termina con tre zeri (000).

Divisibilità per «11»

Un numero è divisibile per «11» se la differenza, presa in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è o zero (0) od «11» od un multiplo di «11».

Esempio: considerando il numero «16 918», procediamo: «x = 8 + 9 + 1 = 18», «y = 1 + 6 = 7, «x – y = 18 – 7 = 11»; il numero «16 918» è divisibile per «11».

Divisibilità per «12»

Un numero è divisibile per «12» se è contemporaneamente divisibile e per «3» e per «4».

Divisibilità per «13»

Un numero è divisibile per «13» se la somma del quadruplo della cifra delle unità col numero formato dalle rimanenti cifre è o zero (0) o «13» od un multiplo di «13».

Esempio: 273 è divisibile per «13» perché «4 • 3 + 27 = 39» e «39» è un multiplo di «13», infatti «39 / 13 = 3».

Divisibilità per «17»

Un numero è divisibile per «17» se la differenza, presa in valore assoluto, fra il numero ottenuto eliminando la cifra delle unità ed il quintuplo della cifra delle unità è o zero o «17» od un multiplo di «17».

Esempio: 1 003 è divisibile per «17», infatti «100 – 5 • 3 = 85»; «85», a sua volta, è divisibile per «17», infatti «8 – 5 • 5 = I17I».

Divisibilità per «20»

Un numero è divisibile per «20» se è composto da almeno due cifre e le sue ultime due cifre a destra son o «00» o «20» o «40» o «60».

Divisibilità per «25»

Un numero è divisibile per «25» se il numero formato dalle sue ultime due cifre è divisibile per «25» ovvero o «00» o «25» o «50» o «75».

Divisibilità per «27»

Per verificare se un numero è divisibile per «27» lo si divide in *terzetti di cifre*, a partire da destra; se la somma di tutti i terzetti da come risultato o «27» o un multiplo di «27» allora il numero di partenza è divisibile per «27».

Esempio: il numero «514.291.761» è divisibile per «27» perché: «761 + 291 + 514 = 1566» è un multiplo di «27»; ovvero, in alternativa, 761 = 28 • 27 + 5 291= 10 • 27 + 21 514 = 19 • 27 + 1 e 5 + 21 + 1 =27.

Divisibilità per «37»

Per verificare se un numero è divisibile per «37» lo si divide in *terzetti di cifre*, a partire da destra; se la somma di tutti i terzetti da come risultato o «37» o un multiplo di «37» allora il numero di partenza è divisibile per «37».

Esempio: il numero «514.291.749» è divisibile per «37» perché: «749 + 291 + 514 = 1 554» che è un multiplo di «37»

Divisibilità per «100»

Un numero è divisibile per «100» se le sue ultime due cifre sono «00».

Divisibilità per «101»

Per verificare se un numero è divisibile per «101», lo si divide in coppie di cifre a partire da destra; se, contando da destra verso sinistra, la differenza tra la somma delle coppie che occupano posto dispari e la somma delle coppie che occupano posto pari dà come risultato o zero (0) o «101» o un multiplo di «101», allora il numero di partenza è divisibile per «101».

Esempio: il numero «514.300.787» è divisibile per «101» perché: dividendolo in coppie, si ha «(87 + 30 + 5) - (7 + 14)» = «122 - 21 = 101»

Divisibilità per «1 001»

Per verificare se un numero è divisibile per «1 001», lo si divide in *terzetti di cifre*, a partire da destra; se contando da destra verso sinistra, la differenza tra la somma dei terzetti che occupano posto dispari e la somma dei terzetti che occupano posto pari dà come risultato o zero (0) o «1 001» od un multiplo intero di «1 001», allora il numero di partenza è divisibile per «1 001».

Criterio generale di divisibilità

Il primo passaggio consiste nella *scomposizione in fattori primi* dei numeri che si prendono in considerazione.

Un volta eseguita la scomposizione, si osservano i fattori: si può affermare che ***i due numeri sono divisibili se nella scomposizione in fattori primi del dividendo*** **(primo numero)** ***si trovano tutti i fattori primi del divisore*** **(secondo numero)*****, con esponente o uguale o maggiore***.

Infine, è possibile ottenere il quoziente della divisione, dividendo i fattori corrispondenti del dividendo e del divisore, applicando la seconda proprietà delle potenze (quoziente di potenze con la stessa base).

Esempio:

Verificare se «504» è divisibile per «36»; eventualmente, eseguire la divisione.

a) eseguiamo la scomposizione, in fattori primi, dei due numeri:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{504} & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{36} & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$504 = 2^3 \bullet 3^2 \bullet 7^1$

$36 = 2^2 \bullet 3^2$

b) osservando la scomposizione in fattori primi del numero «504» si può vedere che i fattori comuni hanno esponente o maggiore od uguale ai fattori del numero «36»; ha, inoltre, un fattore in più, il «7».

Sii può, quindi, affermare che «504» è divisibile per «36»».

c) il quoziente «Q» della divisione si può ottenere dividendo tra loro i fattori primi corrispondenti ottenuti dalla scomposizione in fattori primi:

$$\mathrm{Q} = \frac{2^3 \bullet 3^2 \bullet 7^1}{2^2 \bullet 3^2} = 2^{\,1} \bullet 7^1 = 14$$

Tutti i fattori hanno esponente positivo.

Esempio:

Verificare se «810» è divisibile per «324; eventualmente, eseguire la divisione.

a) eseguiamo la scomposizione in fattori primi dei due numeri:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{810} & 2 \\ 405 & 3 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{324} & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$810 = 2^1 \bullet 3^4 \bullet 5^1$

$324 = 2^2 \bullet 3^4$

b) osservando la scomposizione in fattori primi del numero «810» si può vedere che il suo fattore «2» ha esponente minore del fattore «2» del numero «324».

Si può, quindi, affermare che «810» non è divisibile per «324».

c) il quoziente «Q» della divisione si può ottenere dividendo tra loro i fattori primi corrispondenti ottenuti dalla scomposizione in fattori primi:

$$Q = \frac{2^1 \bullet 3^4 \bullet 5^1}{2^2 \bullet 3^4} = 2^{-1} \bullet 5^1 = 2{,}5$$

Uno o più fattori hanno esponente negativo.

Esempio:

Verificare se «810» è divisibile per «126»; eventualmente, eseguire la divisione.

a) eseguiamo la scomposizione in fattori primi dei due numeri:

540	2		**126**	2
270	2		63	3
135	3		21	7
45	3		1	
15	3			
5	5			
1				

$540 = 2^2 \bullet 3^3 \bullet 5^1$
$126 = 2^1 \bullet 3^1 \bullet 7^1$

b) osservando la scomposizione in fattori primi del numero «540» si può vedere che ha un fattore in meno, il «7», del numero «126».

Si può, quindi, affermare che «540» non è divisibile per «126».

c) il quoziente «Q» della divisione si può ottenere dividendo tra loro i fattori primi corrispondenti ottenuti dalla scomposizione in fattori primi:

$$Q = \frac{2^2 \bullet 3^3 \bullet 5^1}{2^1 \bullet 3^1 \bullet 7^1} = 2^{1} \bullet 3^2 \bullet 5^1 \bullet 7^{-1} = 4{,}285\ldots$$

Uno o più fattori hanno esponente negativo.

Appendice «∞»

Un aneddoto

28 diviso 7

Narra la leggenda che il magazziniere di un gruppo speleologico, di cui non farò il nome (né del magazziniere né del gruppo), dovesse ripartire «28» moschettoni paralleli in lega con ghiera (i classici PLG) fra «7» imbraghi (o imbrachi); non riuscendo ad eseguire la divisione a mente, e non avendo sul momento alcuna calcolatrice scientifica, si ripropose di risolvere il problema come lo risolvevano i padri dei nostri padri: con carta e penna.

Scrisse, pertanto **28 : 7 =**; quindi proseguì:

Il «7» nell'«8» ci sta una volta; scrivo «1» al divisore	2**8** : 7
«1» per «7» uguale a «7»; scrivo il «7» sotto l'«8»	7 ---
«8» meno «7» uguale a «1»	-- 1
Abbasso il «2» è lo scrivo a sinistra dell'«1», come risultato parziale	21

e proseguì:

Il «7» nel «21» ci sta «3» volte; scrivo «3» al divisore alla destra dell'«1»	28 : 7
	7 ---
«3» per «7» uguale a «21»; scrivo il «21» sotto il «21»	-- 13
«21» meno «21» uguale a «zero»	**21 –**
	21 =
Da cui dedusse che «28» diviso «7» dovesse essere	--
uguale a «13».	0

Quando, però, è andato a distribuire i vari moschettoni sui vari imbraghi, si rese conto che vi era qualcosa che non tornava; si rivolse, pertanto, ad uno dei più esperti Istruttori di Tecnica (IT) del suo gruppo e per avere lumi in merito e per avere la conferma che il risultato dell'operazione, da lui eseguita, fosse giusta.

Scoprire se il risultato che hai ottenuto è corretto è banale, sottolineò l'istruttore, *mi sembra di ricordare che per la proprietà invariantiva della divisione, se* «28» *diviso* «7» *è uguale a* «13» *allora* «13» *moltiplicato* «7» *deve dare come risultato* «28».

Osservazioni

In verità, la proprietà Invariantiva della divisione recita: in una divisione il quoziente tra due numeri non cambia se dividiamo o moltiplichiamo sia il dividendo che il divisore per uno stesso numero, diverso da zero.

Scrisse, pertanto **13 x 7 =**; quindi proseguì:

Il «7» moltiplicato per «1» da «7»; scrivo «7»	13 x
Il «7» moltiplicato per «3» da «21»; scrivo il «21» sotto il «7»	7 =
«7» più «1» è uguale ad «8»; scrivo l'«8» come risultato parziale	--
abbasso il «2» è lo scrivo a sinistra dell'«8», ottenendo come risultato «28»	7 +
	21 =
Da cui dedusse che «13» moltiplicato «7» dovesse essere	--
uguale a «28».	28

L'operazione eseguita dal magazziniere era, pertanto, corretta, ma anche l'Istruttore di Tecnica trovò molte difficoltà a distribuire i «28» moschettoni in numero di «13» per ognuno dei «7» imbraghi.

In accordo col magazziniere si rivolse, quindi, al Direttore della ~~Squola~~ Scuola del proprio gruppo il quale li rimproverò per il fatto che si ostinassero ad utilizzare complesse procedure matematiche; *la cosa e più semplice e più sicura* – sentenziò – *è quella di utilizzare la sola addizione*.

Scrisse, pertanto «7» numeri «13» incolonnati; quindi proseguì:

«3» + «3» = «6», + «3» = «9», + «3» = «12»,	13 +
+ «3» = «15», + «3» = «18», + «3» = «21»,	13 +
	13 +
e, ri-iniziando dall'alto, proseguì:	13 +
+ «1» = «22», + «1» = «23», + «1» = «24», + «1» = «25»,	13 +
+ «1» = «26», + «1» = «27», + «1» = «28»	13 +
	13 =
Da cui dedusse che «13» addizionato «7» volte dovesse essere	--
uguale a «28».	28

I tre si convinsero, pertanto, che era scientificamente provato, oltre ogni ragionevole dubbio, che fosse affatto vera la relazione **28 : 7 = 13**.

Voci non controllate, narrano che, sempre loro tre, ancora non si capacitano come, in pratica, non riescano a disporre i «*ventotto*» moschettoni nel numero di «*tredici*» per ognuno dei «*sette*» imbraghi; ma sopratutto non riescono a capacitarsi come l'ultima versione della calcolatrice scientifica del più aggiornato **Windows 10**, installato su un moderno calcolatore da «1 300 €» a «64 bit» e con processore **Intel Core i9-9920X** (di cui taccio la marca per non incorrere nell'infrazione di *pubblicità scorretta*), possa fornire, come risultato dell'operazione **28 : 7**, l'assurdo valore di «**4**».

Indice analitico

Paragrafi pagina

«Antiche» metodiche matematiche

Curiosità prese a caso

Avvertenze

La mnemonica di alcuni numeri

Le formule più belle

Appendici

Secnodo un pfrosseore dlel'Unviesrita' di Cmabrdige, non imorpta in che oridne apapaino le letetre in una paolra, l'uinca csoa imnorptate e' che la pimra e la ulimta letetra sinao nel ptoso gituso. Il riustlato puo' serbmare mloto cnofsuo e noonstatne ttuto si puo' legerge sezna mloti prleobmi. Qesuto si dvee al ftato che la mtene uanma non lgege ongi ltetera una ad una, ma la paolra nel suo isineme.

Pensate abbia ragione?

Bibliografia essenziale

[R. 01] Albrecht Beutelspacher 2008
Le meraviglie della matematica
Adriano Salami Editore Varese

[R. 02] Albrecht Beutelspacher 2007
Matematica da tasca
Adriano Salami Editore Varese

[R. 03] Claudi Alsina 2010
La setta dei numeri (Il teorema di Pitagora)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 04] David R. Green – John Lewis 1980
Le scienze con il calcolatore tascabile
franco muzzio & c. editore Padova

[R. 05] Italo Ghersi 1967
Matematica dilettevole e curiosa
Editore Ulrico Hoepli Milano

[R. 06] Fernando Corbalàn 2010
La sezione aurea (Il linguaggio matematico della bellezza)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 07] Joaquin Navarro Sandalinas 2012
Eulero (L'analisi matematica) numeri al limite
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 08] Josep Pla i Carrera 2012
Euclide (La geometria) Il mondo a tre dimensioni
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 09] Josep Sales e Francesc Banyuls 2011
Curve pericolose (Ellissi, Iperbole e altre meraviglie geometriche)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 10] Juanjo Rué 2011
L'arte di contare (Calcolo combinatorio ed enumerazione)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 11] Luigi Brasca – Eugenio Levi 1966
Tavole per calcoli di topografia ed estimo
ghissetti & corvi – editore Milano

[R. 12] Marcos Jaén Aànchez 2013
Pitagora (Il teorema di Pitagora) Un segreto racchiuso da tre pareti
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 13] Martin Gardner 1984
Show di magia matematica
Arti Grafiche Emiliane Bologa

[R. 14] Michael R. Williams 1989
Storia dei computer (Dall'abaco ai calcolatori elettronici)
franco muzzio & c. editore Padova

[R. 15] Miquel Alberti 2010
La creatività matematica (Come funzionano le menti straordinarie)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 16] Pere Grima 2010
La certezza saaoluta e altre finzioni (I segreti della statistica)
Mondo matematico

Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 16] Paolo Baraggia – Nora Nava 1987
Elementi di probabilità e statistica
Lito Velox Trento

[R. 17] Raymond Smullyan 1985
Qual è il titolo di questo libro?
Grafiche Galeati Imola

[R. 18] Rufiàn Lizana Antonio 2013
Gauss (la teoria dei numeri)
Grandi idee della scienza
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 19] Vicenç Torra 2011
Dal pallottoliere alla rivoluzione digitale (Algoritmi e informatica)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra